

1. ÚVOD. REÁLNÁ ČÍSLA. FUNKCE.

Používané značení. Pro P, Q výroky, x, y, z prvky, A, B, M množiny:

$P \& Q$	P a zároveň Q
$P \vee Q$	P nebo Q
$P \implies Q$	P implikuje Q
$P \iff Q$	P je ekvivalentní Q
$\neg P$	negace P
$\forall x$	pro každé x
$\exists x$	existuje x
$\exists! x$	existuje jediné x
$x \in A$	x je prvkem množiny A
$A \subset B$	A je podmnožina B
$\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$	množina s prvky a_1, a_2, \dots, a_N
$\{x \in M; \varphi(x)\}$	množina všech prvků M s vlastností $\varphi(x)$
\emptyset nebo $\{\}$	prázdná množina
$A \cup B$	sjednocení množin
$A \cap B$	průnik množin
$A \setminus B$	rozdíl množin

Věta A1. (Algebraické vlastnosti \mathbb{R} .) Existuje množina reálných čísel \mathbb{R} , která obsahuje prvky 0 a 1, a jsou na ní definovány operace ' \cdot ' (násobení) a ' $+$ ' (sčítání) tak, že pro $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

- (i) $x + y = y + x, x \cdot y = y \cdot x$
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- (iii) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- (iv) $0 + x = x, 1 \cdot x = x$
- (v) $0 \cdot x = 0$ a naopak: $x \cdot y = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$

Dále platí:

- (vi) $\forall x, z \in \mathbb{R} \exists! w \in \mathbb{R}$ tak, že $x + w = z$, značíme $w = z - x$
- (vii) $\forall z, x \in \mathbb{R} x \neq 0 \exists! w \in \mathbb{R}$ tak, že $x \cdot w = z$, značíme $w = \frac{z}{x}$

Poznámky. $-x$ je zkratka za $0 - x$, x^{-1} zkratka za $1 : x$ alias $1/x$. Další standardní značení x^n, x^{-n} etc.

Z bodů (i)–(vii) lze vyvodit všechny další známé poučky, jako např. $-(-x) = x, (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$ apod.

Věta A2. (Uspořádání \mathbb{R} .) Na množině \mathbb{R} je definována relace ' $<$ ' (menší než) tak, že pro $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ platí:

- (i) nastane právě jedna z možností: $x = y$ nebo $x < y$ nebo $y < x$
- (ii) $x < y \& y < z \implies x < z$

- (iii) $x < y \implies x + z < y + z$
 (iv) $0 < x \ \& \ 0 < y \implies 0 < x \cdot y$

Poznámka. $x \leq y$ je zkratka za $(x < y) \vee (x = y)$. Z Věty A2 opět lze vyvodit další známé poučky, např. $x^2 \geq 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ nebo $x < 0$ a $y < 0$ implikuje $x \cdot y > 0$ atd.

Definice. (Význačné podmnožiny \mathbb{R} .)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (přirozená čísla)

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ (celá čísla)

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (racionální čísla)

Intervaly s krajními body $a < b \in \mathbb{R}$:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ (otevřený)

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ (uzavřený)

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

Neomezené intervaly:

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$

Definice. Pro $x \in \mathbb{R}$ definuji $|x|$ (absolutní hodnota x) jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x, & \text{pokud } x < 0 \end{cases}$$

Poznámky. Snadno se ukáže, že platí: $|x| \geq 0$, navíc $|x| = 0$ právě když $x = 0$. Dále $|\pm x| = |x|$, $|xy| = |x||y|$ a pokud $y \neq 0$, tak $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$. Vztah k součtu/rozdílu vyřešíme v následujícím.

Lemma 1.1. Nechť $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ libovolné. Potom $|b| \leq a$ právě když $-a \leq b \leq a$.

Věta 1.1. (Trojúhelníková nerovnost.) Pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí:

(i) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

Věta B. (Odmocnina v \mathbb{R} .)

1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je sudé. Potom $\forall a \in [0, +\infty) \exists! b \in [0, +\infty)$ tak, že $b^n = a$.

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché. Potom $\forall a \in \mathbb{R} \exists! b \in \mathbb{R}$ tak, že $b^n = a$.

Značíme $b = \sqrt[n]{a}$, nazýváme n -tá odmocnina z a .

Poznámky.

- $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt[3]{-1} = -1$, ale $\sqrt{-1}$ není definováno (\sqrt{x} je obvyklá zkratka za $\sqrt[2]{x}$)
- POZOR: $\sqrt{x^2} = |x|$, tj. $\sqrt{x^2} = x$ pro $x \geq 0$, ale $\sqrt{x^2} = -x$ pro $x < 0$.
- $\sqrt[n]{x^n} = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, n liché.

Věta 1.2. Existují iracionální čísla.

Věta A3. (Vlastnosti \mathbb{N} .)

- (i) (Archimédova vlastnost) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $n > x$
(ii) (princip indukce) Necht' $M \subset \mathbb{N}$ splňuje:

1. $1 \in M$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \implies n + 1 \in M$

Potom $M = \mathbb{N}$.

Poznámky.

- Archimédova vlastnost (též Eudoxova vlastnost) $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon > 1$
- indukce jinak: necht' pro $n_0 \in \mathbb{N}$ a formuli ("vlastnost přirozených čísel") $\psi(n)$ platí:

1. $\psi(n_0)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 : \psi(n) \implies \psi(n + 1)$

Potom $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \psi(n)$.

- indukce ještě jinak: každá $M \subset \mathbb{N}$ neprázdná má nejmenší prvek.

Věta 1.3. Každý interval $I = (a, b)$ obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Definice. Necht' $M \subset \mathbb{R}$.

Číslo $x \in M$ se nazve maximum (největší prvek) M , pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \leq x$.
Značíme $x = \max M$.

Číslo $x \in M$ se nazve minimum (nejmenší prvek) M , pokud pro $\forall y \in M$ platí $y \geq x$.
Značíme $x = \min M$.

Číslo $K \in \mathbb{R}$ se nazve horní odhad M , pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \leq K$.

Číslo $L \in \mathbb{R}$ se nazve dolní odhad M , pokud pro $\forall x \in M$ platí $x \geq L$.

Množina se nazve shora omezená, má-li nějaký horní odhad; zdola omezená, má-li nějaký dolní odhad. Množina se nazve omezená, je-li omezená shora i zdola.

Příklady. ① $M = [0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x < 1\}$... 0 je minimum, maximum neexistuje.
Omezená množina.

② $M = \mathbb{N}$... 1 minimum, maximum neexistuje. Zdola omezená, shora neomezená množina.

Definice. Necht' $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $S \in \mathbb{R}$ se nazve supremum množiny M , značíme $S = \sup M$, jestliže

- (i) $\forall x \in M$ platí $x \leq S$
- (ii) $\forall S' < S \exists y \in M$ tak, že $y > S'$

Poznámky.

- zobecnění pojmu maximum, přesněji: je-li $x = \max M$, pak též $x = \sup M$. Může se však stát, že supremum je definováno, maximum ne; např. pro $M = [0, 1)$.
- vlastnost (i) = je to horní odhad, vlastnost (ii) = nic menšího není horní odhad. Tj. „supremum“ je totéž co „nejmenší horní odhad“ množiny
- existuje nejvýše jedno supremum množiny

Definice. Číslo s se nazve infimum množiny M , značíme $s = \inf M$, jestliže

- (i) $\forall x \in M$ platí $x \geq s$
- (ii) $\forall s' > s \exists y \in M$ tak, že $y < s'$

Poznámky. Analogicky jako výše platí: infimum zobecňuje pojem minima; je to největší dolní odhad množiny. Infimum (pokud existuje) je nejvýše jedno.

Věta A4. (Úplnost \mathbb{R} .) Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Potom existuje $S \in \mathbb{R}$ tak, že $S = \sup M$.

Věta A4'. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Potom existuje $s \in \mathbb{R}$ tak, že $s = \inf M$.

Definice. (Komplexní čísla.) Symbolem \mathbb{C} značíme množinu všech čísel tvaru $x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a i je imaginární jednotka (platí $i^2 = -1$.) Je-li $z = x + iy$, píšeme $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ (reálná, resp. imaginární část z).

Definice. (Rozšířená reálná čísla.) Klademe $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{(+)\infty, -\infty\}$. Uspořádání a početní operace s prvky $\pm\infty$ definujeme takto:

- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $-\infty < x < +\infty$, dále $-\infty < +\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$, dále $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
- $\forall x > 0$ je $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$, dále $\pm\infty \cdot (+\infty) = \pm\infty$
- $\forall x < 0$ je $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$, dále $\pm\infty \cdot (-\infty) = \mp\infty$
- $\forall x \in \mathbb{R}$ je $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Nedefinováno zůstává: $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{x}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Poznámka. Proč počítání s $\pm\infty$ definujeme právě takto? Souvisí s aritmetikou limit, viz Věta 2.7 níže.

Definice. Nechť X, Y jsou množiny. Funkcí (zobrazením) f z X do Y se rozumí libovolný předpis, který každému prvku z X přiřadí právě jeden prvek z Y . Značíme $f : X \rightarrow Y$, $x \mapsto f(x)$.

Pro $M \subset X$ definuji obraz M jako

$$f(M) = \{y \in Y; \exists x \in M \text{ tak, že } f(x) = y\}$$

a pro $N \subset Y$ definuji vzor N jako

$$f^{-1}(N) = \{x \in X; f(x) \in N\}.$$

Funkce je prostá, pokud $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$. Funkce je "na" (zobrazuje X na Y), pokud $f(X) = Y$.

Je-li $f : X \rightarrow Y$ prostá a "na", řekneme, že je vzájemně jednoznačná. Pak lze definovat inverzní funkci $f_{-1} : X \rightarrow Y$, která prvku $y \in Y$ přiřadí ten (jednoznačně určený) prvek $x \in X$, že $f(x) = y$.

Je-li $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, definujeme složené zobrazení (superpozici) $g \circ f : X \rightarrow Z$ předpisem $x \mapsto g(f(x))$.

Občas píšeme $f : X \rightarrow Y$, ačkoliv $f(x)$ není definováno pro úplně všechna $x \in X$. Pak značí D_f (definiční obor f) množinu těch $x \in X$, pro něž $f(x)$ definováno je, a H_f (obor hodnot) značí $f(D_f)$.

2. REÁLNÉ FUNKCE. LIMITA A SPOJITOST.

Úmluva. Reálnou funkcí rozumíme funkci z \mathbb{R} do \mathbb{R} , tj. nepřipouštíme $\pm\infty$ v argumentu nebo hodnotě funkce. Podobně $\exists\delta > 0$ značí $\exists\delta \in (0, +\infty)$, tj. nepovoluje $\delta = +\infty$.

Příklad. Pro $f(x) = 1/x$ je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, třebaže je definováno $1/\pm\infty = 0$.

Definice. Reálná funkce $f(x)$ se nazve rostoucí (resp. klesající resp. nerostoucí resp. neklesající) na množině M , pokud $\forall x < y \in M$ je $f(x) < f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$) resp. $f(x) \geq f(y)$ resp. $f(x) \leq f(y)$). Souhrnný název: monotónní (rostoucí/klesající: ryze monotónní) funkce.

Funkce $f(x)$ na množině M se nazve:

- shora omezená, pokud $\exists K \in \mathbb{R}$ t.ž. $f(x) \leq K, \forall x \in M$
- zdola omezená, pokud $\exists L \in \mathbb{R}$ t.ž. $f(x) \geq L, \forall x \in M$
- omezená, je-li zde shora i zdola omezená.

Funkce je omezená na M , právě když $\exists C > 0$ t.ž. $|f(x)| \leq C, \forall x \in M$.

Funkce $f(x)$ se nazve:

- sudá, pokud $x \in D_f \implies -x \in D_f$ & $f(-x) = f(x)$
- lichá, pokud $x \in D_f \implies -x \in D_f$ & $f(-x) = -f(x)$
- p -periodická, pokud $x \in D_f \implies x + p \in D_f$ & $f(x + p) = f(x)$

Definice. (Okolí bodu.) Necht' $\delta > 0$. Pro $x_0 \in \mathbb{R}$ definujeme

$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \dots$ kruhové δ -okolí x_0

$P(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \dots$ prstencové (redukované) δ -okolí x_0

$U_+(x_0, \delta) = [x_0, x_0 + \delta) \dots$ pravé kruhové δ -okolí x_0

$U_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0] \dots$ levé kruhové δ -okolí x_0

$P_+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta) \dots$ pravé prstencové δ -okolí x_0

$P_-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \dots$ levé prstencové δ -okolí x_0

Dále definujeme

$U(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty], P(+\infty, \delta) = (\frac{1}{\delta}, +\infty)$

$U(-\infty, \delta) = [-\infty, -\frac{1}{\delta}), P(-\infty, \delta) = (-\infty, -\frac{1}{\delta})$

$U_-(+\infty, \delta) = U(+\infty, \delta), P_-(+\infty, \delta) = P(+\infty, \delta), U_+(-\infty, \delta) = U(-\infty, \delta), P_+(-\infty, \delta) = P(-\infty, \delta)$.

Pravé okolí ∞ , levé okolí $-\infty$ nedefinujeme.

Poznámky.

- $\delta_1 < \delta_2 \implies U(x_0, \delta_1) \subset U(x_0, \delta_2) \dots$ čím menší δ , tím menší okolí (platí i u $\pm\infty$)

- $U(x_0, \delta)$ a $P(x_0, \delta)$ se liší bodem x_0 , tj.

$$U(x_0, \delta) = P(x_0, \delta) \cup \{x_0\}, \quad P(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$$

- pro $x_0 \in \mathbb{R}$ platí:

$$U(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \delta\}$$

$$P(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

- píšeme $U(x_0)$ místo $U(x_0, \delta)$, pokud na δ nezáleží; obrat "na jistém $P(x_0)$ platí..." je zkratka za "existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ platí..."

Věta 2.1. (Princip oddělení.) Necht' $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^*$, $x_0 \neq x_1$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \cap U(x_1, \delta) = \emptyset$. Speciálně $x_0 \notin U(x_1, \delta)$, $x_1 \notin U(x_0, \delta)$.

Definice. Necht' $x_0 \in \mathbb{R}^*$, necht' $f(x)$ je definována na jistém $P(x_0, \delta)$. Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0 , jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)].$$

Značíme $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0$, nebo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Terminologie: pokud $A \in \mathbb{R}$, jde o limitu vlastní (konečnou), pro $A = \pm\infty$ je limita nevlastní.

Poznámky.

- limita v x_0 nezávisí na $f(x_0)$, $f(x)$ nemusí být v x_0 ani definována
- názorně: x blízko x_0 , ale různé od $x_0 \implies f(x)$ blízké (nebo rovné) A
- ekvivalentní zápis:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[f(P(x_0, \delta)) \subset U(A, \varepsilon)].$$

speciálně pro $x_0, A \in \mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon].$$

- limita (pokud existuje) je nejvýše jedna

Příklady. ① $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

② $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} = +\infty$

③ Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

nemá limitu v žádném bodě.

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť $f(x)$ je definována na jistém $P_+(x_0, \delta)$ (resp. $P_-(x_0, \delta)$). Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)]$$

respektive

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(A, \varepsilon)].$$

Značíme $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0+$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$, resp. $f(x) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0-$,
 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$.

Příklady. ① pro funkci signum

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

platí: $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn} x = -1$

② $\lim_{x \rightarrow 0\pm} x^{-1} = \pm\infty$

Věta 2.2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existuje a rovná se A
- (2) limity $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ existují a rovnají se témuž A

Lemma 2.1. (1) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 vlastní limitu. Potom $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$.

(2) Nechť $f(x)$ má v bodě x_0 limitu (i nevlastní), různou od 0. Potom $f(x)$ je na jistém $P(x_0)$ “odražená od nuly”, tj.

$$(\exists \delta > 0)(\exists \Delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies |f(x)| > \Delta].$$

Věta 2.3. (Aritmetika limit - 1. verze.) Nechť $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$ pro $x \rightarrow x_0$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Potom

- (1) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$
- (2) $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$
- (3) $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$
- (4) pokud $B \neq 0$, tak $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$

toto vše pro $x \rightarrow x_0$.

Věta 2.4. Nechť $f(x)$ je omezená na jistém $P(x_0)$, nechť $g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$. Potom $f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$.

Poznámka. Platí jednostranné verze uvedených vět, např.:

Jestliže $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$ pro $x \rightarrow x_0+$, pak $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$ pro $x \rightarrow x_0+$.

Jestliže $f(x)$ je omezená na jistém $P_-(x_0)$ a $g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0^-$, pak $f(x) \cdot g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0^-$. A podobně.

Definice. Necht' $x_0 \in \mathbb{R}$, necht' $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0 , jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [x \in U(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Ekvivalentní zápisy:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [f(U(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)] \\ & (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) [|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] \end{aligned}$$

Věta 2.5. (Vztah limity a spojitosti.) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) $f(x)$ je spojitá v x_0
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existuje a rovná se $f(x_0)$

Stručně řečeno: spojitě funkce jsou takové, že limitu $x \rightarrow x_0$ spočítám dosazením $x = x_0$.

Příklady.

- ① polynom, tj. funkce tvaru $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, kde $a_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, je spojitý v každém $x_0 \in \mathbb{R}$
- ② racionální funkce, tj. funkce tvaru $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde $p(x), q(x)$ jsou polynomy, je spojitá v každém $x_0 \in \mathbb{R}$, ve kterém $q(x_0) \neq 0$
- ③ funkce $\sin x, \cos x, \exp x$ jsou spojitě v každém bodě z \mathbb{R} ; funkce $\ln x$ je spojitá v každém bodě $(0, \infty)$ - viz Kapitola 3 níže.
- ④ funkce \sqrt{x} je spojitá v každém bodě z $(0, \infty)$; uvidíme později, že $\sqrt[n]{x}$ je vždy spojitá (ve svém definičním oboru)
- ⑤ funkce $\operatorname{sgn} x$ je spojitá všude mimo $x = 0$
- ⑥ funkce $F(x) = x \cdot D(x)$, kde $D(x)$ je Dirichletova funkce, je spojitá v $x = 0$ a nikde jinde

Věta 2.6. (Limita superpozice) Necht' $f(x) \rightarrow y_0$ pro $x \rightarrow x_0$, necht' $g(y) \rightarrow A$ pro $y \rightarrow y_0$, kde $A, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^*$. Necht' je dále splněn alespoň jeden z následujících předpokladů:

- (a) $g(y)$ je spojitá v y_0
- (b) $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x) \neq y_0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$

Potom $g(f(x)) \rightarrow A$ pro $x \rightarrow x_0$.

Příklady.

- ① $\sqrt{x^3 - 3x + 1} \rightarrow \sqrt{3}$ pro $x \rightarrow 2$
- ② $\frac{\sin(x + x^2)}{x} \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow 0$
- ③ !! bez předpokladu (a) nebo (b) se nelze obejít: definuji $f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(y) = 0$ pro $y \neq 0$ a $g(0) = 1$. Potom $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow 0$, $g(y) \rightarrow 0$ pro $y \rightarrow 0$, avšak $g(f(x)) \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow 0$.

Poznámka. Výrok $f(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow x_0$ můžeme ekvivalentně napsat jako

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) > K].$$

Podobně $f(x) \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$ je ekvivalentní

$$(\forall L < 0)(\exists \delta > 0)[x \in P(x_0, \delta) \implies f(x) < L].$$

Věta 2.7. (Aritmetika limit - obecná verze.) Necht' $f(x) \rightarrow A$, $g(x) \rightarrow B$ pro $x \rightarrow x_0$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$. Potom

(1) $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$

(2) $f(x) - g(x) \rightarrow A - B$

(3) $f(x) \cdot g(x) \rightarrow A \cdot B$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$

pro $x \rightarrow x_0$, má-li výraz napravo smysl.

Příklady. ① $\frac{1}{x^2+1} \rightarrow \frac{1}{(+\infty)(+\infty)+1} = 0$ pro $x \rightarrow +\infty$

② $x^3 + 3x^2 + 4 = x^3(1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}) \rightarrow (-\infty)^3(1 + \frac{3}{-\infty} + \frac{4}{(-\infty)^3}) = -\infty$ pro $x \rightarrow -\infty$

Poznámka. Proč nedefinuji některé výrazy, např. $\frac{+\infty}{+\infty}$? Protože když $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow +\infty$, nelze obecně říci, co dělá $\frac{f(x)}{g(x)}$. - Operace s $\pm\infty$ jsou definovány právě tak, aby platila Věta 2.7.

Věta 2.8. (Limity typu $\frac{1}{\pm 0} = \pm\infty$.) Necht' $f(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$.

(1) Je-li $f(x) > 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

(2) Je-li $f(x) < 0$ na jistém $P(x_0)$, pak $\frac{1}{f(x)} \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

Příklady. ① $\frac{\sin\sqrt{x}}{x} \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow 0+$

② $\frac{1}{x+x^2} \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow 0-$

Věta 2.9. (Zachování nerovnosti v limitě.) Necht' $f(x) \rightarrow a$ pro $x \rightarrow x_0$. Necht' existuje $A \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) \leq A$ na jistém $P(x_0)$. Potom $a \leq A$.

Poznámky.

- platí zrcadlová verze s \geq místo \leq

- neplatí verze s ostrou nerovností: $f(x) = 1 - \frac{1}{x} < 1$ na $P(+\infty)$, avšak $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \not< 1$

- souhrně: neostrá nerovnost se v limitě zachová, ostrá se může změnit v rovnost

Věta 2.10. (O dvou policajtech.) Necht' $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ jsou definovány na jistém $P(x_0)$.

(1) Necht' $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ platí na jistém $P(x_0)$, a necht' $g(x) \rightarrow a$, $h(x) \rightarrow a$ pro $x \rightarrow x_0$, kde $a \in \mathbb{R}$. Potom $f(x) \rightarrow a$ pro $x \rightarrow x_0$.

(2) Necht' $g(x) \leq f(x)$ na jistém $P(x_0)$, necht' $g(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow x_0$. Potom $f(x) \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

(3) Necht' $f(x) \leq h(x)$ na jistém $P(x_0)$, necht' $h(x) \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$. Potom $f(x) \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

Příklady. ① $\frac{x^2+1}{\lfloor x^2 \rfloor + 1} \rightarrow 1$ pro $x \rightarrow +\infty$, kde

$$\lfloor y \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq y\}$$

je tzv. celá část y .

② $\cos x + x \rightarrow -\infty$ pro $x \rightarrow -\infty$

Věta 2.11. [O limitě monotónní funkce.] Nechť $f(x)$ je monotónní v intervalu (a, b) . Potom existují $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. Navíc: tyto limity jsou vlastní, právě když je $f(x)$ správným způsobem omezená.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$), kde $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava (resp. zleva), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in U_+(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)]$$

respektive

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in U_-(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Ekvivalentní zápisy (pro spojitost zprava):

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[f(U_+(x_0, \delta)) \subset U(f(x_0), \varepsilon)] \\ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x_0 \leq x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] \end{aligned}$$

Věta 2.12.

(1) $f(x)$ je spojitá v x_0 zprava, právě když $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

(2) $f(x)$ je spojitá v x_0 zleva, právě když $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

(3) $f(x)$ je spojitá v x_0 , právě když je tam spojitá zleva i zprava.

Příklad. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ je v 0 spojitá zprava, nespojitá zleva.

Definice. Nechť $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že $f(x)$ je spojitá v I (na I , vzhledem k I), jestliže pro každé $x_0 \in I$ platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x \in U(x_0, \delta) \cap I \implies f(x) \in U(f(x_0), \varepsilon)].$$

Poznámka. Ihned z definice plyne: je-li $f(x)$ spojitá v I , a $\tilde{I} \subset I$, pak $f(x)$ je spojitá v \tilde{I} .

Poznámka. U intervalu rozlišujeme vnitřní a krajní body. Bod $x_0 \in I$ je vnitřní, právě když existuje $\delta > 0$ tak, že $U(x_0, \delta) \subset I$. Krajní bod může, ale nemusí být prvkem intervalu. Tedy (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$ a $[a, b]$ jsou intervaly s krajními body a, b . Vnitřními body jsou ve všech čtyřech případech body z (a, b) .

Věta 2.13. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $f(x)$ je spojitá v I

(2) $f(x)$ je spojitá v každém vnitřním bodě I ; pokud levý krajní bod je prvkem I , je v něm spojitá zprava; pokud pravý krajní bod je prvkem I , je v něm spojitá zleva

(3) $f(x)$ je spojitá zprava v každém bodě I , který není pravý krajní, a je spojitá zleva v každém bodě I , který není levý krajní

Věta 2.14.¹ Necht' $f(x)$, $g(x)$ jsou spojité v intervalu I . Potom funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou spojité v I . Jestliže $g(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$, je také funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v I .

Věta 2.15. (Spojitost superpozice.) Necht' $f(x)$ je spojitá v I , necht' $g(y)$ je spojitá v J , kde $I, J \subset \mathbb{R}$. Necht' $f(I) \subset J$. Potom funkce $(g \circ f)(x)$ je spojitá v I .

Věta 2.16. (Darbouxova.) Necht' $f(x)$ je spojitá v I , kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Necht' γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde $a, b \in I$. Potom mezi a, b leží c takové, že $f(c) = \gamma$.

Důsledek. Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá. Potom $f(I)$ je také interval. (Spojitý obraz intervalu je interval.)

Poznámka. Větu A4 lze zobecnit takto: Necht' $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná. Potom existuje $S \in \mathbb{R}^*$ tak, že $S = \sup M$. Také existuje $s \in \mathbb{R}^*$ tak, že $s = \inf M$.

Věta 2.17. (O spojitosti inverzní funkce.) Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v I . Označ $J = f(I)$. Potom J je interval, $f(x) : I \rightarrow J$ je vzájemně jednoznačná a $f_{-1}(y) : J \rightarrow I$ je ryze monotónní, spojitá.

Důsledek. Důkaz Věty B (o odmocnině); navíc dostáváme, že $\sqrt[n]{y}$ je pro sudé n spojitá v $[0, +\infty)$, pro liché n je spojitá v \mathbb{R} .

Lemma 2.3. (1) Necht' $f(x)$ je definována na jistém $P(+\infty)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y).$$

(2) Necht' $f(x)$ je definována na jistém $P(-\infty)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^-} f(1/y).$$

Rovnosti chápu takto: existuje-li jedna limita, existuje i druhá a rovnají se.

Poznámky. Necht' $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkci $F(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$ ztotožním s dvojicí funkcí $f_1(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde $F(x) = f_1(x) + if_2(x)$, neboli $f_1(x) = \operatorname{Re} F(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} F(x)$.

Limitu definuji takto: $F(x) \rightarrow A \in \mathbb{C}$ pro $x \rightarrow x_0$, jestliže $\operatorname{Re} F(x) \rightarrow \operatorname{Re} A$, $\operatorname{Im} F(x) \rightarrow \operatorname{Im} A$ pro $x \rightarrow x_0$. Spojitost analogicky: $F(x)$ je spojitá (v bodě, na intervalu), jestliže funkce $\operatorname{Re} F(x)$, $\operatorname{Im} F(x)$ jsou spojité (v bodě, na intervalu).

Tímto přechodem k reálné resp. imaginární části dokážeme např. zobecnění Věty 2.3. (o aritmetice limit) pro $A, B \in \mathbb{C}$.

3. ELEMENTÁRNÍ FUNKCE.

Věta C. Existují funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ z \mathbb{R} do \mathbb{R} a číslo $\pi \in (0, +\infty)$ tak, že platí:

¹Bez důkazu.

1. $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$,
 $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
2. $\sin(-x) = -\sin(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $\cos(-x) = \cos(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$;
3. funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou spojité v \mathbb{R} ;
4. funkce $\sin(x)$ je rostoucí v $[0, \pi/2]$ a $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$;
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou těmito vlastnostmi určeny jednoznačně.

Z 1–5 lze vyvodit všechny další známé vlastnosti funkcí $\sin x$ a $\cos x$.

- $\cos 0 = 1$, neboť $1 = \sin(\pi/2 + 0) = \sin(\pi/2) \cos 0 + \cos(\pi/2) \sin 0 = \cos 0 + 0$ (dle 1, 4)
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, neboť

$$1 = \cos 0 = \cos(x + (-x)) = \cos(x) \cos(-x) - \sin(x) \sin(-x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$
 (dle 1, 2, 4 a předchozího bodu)
- $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$ v \mathbb{R} (dle předchozího bodu)
- $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$, $\sin(-\pi/2) = -1$
 (dobrovolné domácí cvičení)
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, (dle 1 a předchozího)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou 2π -periodické (dle předchozího)
- funkce $\sin(x)$, $\cos(x)$ lze vzájemně nahradit (pomocí předchozích vzorečků):

$$\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$$

$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
 $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$
 Odvodíme následujícím trikem: položíme $x := (a+b)/2$, $y := (a-b)/2$. Pak $a = x+y$,
 $b = x - y$ a užijeme vzorce 1.

- další užitečné vzorce a vlastnosti:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi, \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ libovolné}$$

- základní limita pro kosinus: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Věta D. Existuje funkce $\ln(x)$ z $(0, +\infty)$ do \mathbb{R} taková, že

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pro $\forall x, y \in (0, +\infty)$;
2. $\ln(x)$ je rostoucí a spojitá na $(0, +\infty)$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Funkce $\ln(x)$ je těmito vlastnostmi jednoznačně určena.

Z 1–3 plynou další vlastnosti funkce $\ln(x)$:

- $\ln 1 = 0$, neboť $\ln 1 = \ln(1 \cdot 1) = \ln 1 + \ln 1$
- $\ln(1/x) = -\ln(x)$, neboť $0 = \ln 1 = \ln(x \cdot 1/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$ pro $n \in \mathbb{N}, x > 0$
- $\ln(\sqrt[k]{x}) = (1/k) \ln(x)$ pro $k \in \mathbb{N}, x > 0$, neboť $\ln(x) = \ln((\sqrt[k]{x})^k) = k \ln(\sqrt[k]{x})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. Chceme ukázat, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[x > 1/\delta \implies \ln x > 1/\varepsilon].$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno: protože $\ln(x)$ je rostoucí, je $\ln 2 > \ln 1 = 0$ a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n \ln 2 > 1/\varepsilon$. Položme $\delta = 1/2^n$.

Potom $x > 1/\delta \implies x > 2^n \implies \ln x > n \ln 2 > 1/\varepsilon$.

- $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$, neboť díky Lemmatu 2.3

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(1/y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} [-\ln(y)] = -\infty.$$

- $\ln((0, +\infty)) = \mathbb{R}$. Obor hodnot je interval (ze spojitosti); podle předchozího je shora i zdola neomezený.

Věta E. Existuje funkce $\exp(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ taková, že platí:

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$ pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$;
2. $\exp(x)$ je spojitá a rostoucí v \mathbb{R} ;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$.

Funkce $\exp(x)$ je navíc vlastnostmi 1–3 jednoznačně určena.

Samozřejmě funkce $\ln x$ a $\exp x$ jsou vzájemně inverzní. Větu E můžeme také dokázat z Věty D tak, že položíme $\exp = (\ln)_{-1}$ – všechny vlastnosti $\exp(x)$ pak plynou z vlastností $\ln(x)$ a z toho, že jde o funkce vzájemně inverzní:

- $\exp(x)$ je rostoucí, neboť $\ln(x)$ je rostoucí
- $\exp(x)$ zobrazuje \mathbb{R} vzájemně jednoznačně na $(0, +\infty)$
- vlastnost 1 plyne z vlastnosti 1 funkce $\ln(x)$, Věta D
- limita sub 3 plyne ze základní limity pro $\ln(x)$ (vlastnost 3 ve Větě D) a ze spojitosti funkce $\exp(x)$

Funkce $\exp(x)$ má tyto další vlastnosti (dokažte sami):

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

Definice. (Obecná mocnina.) Pro $x > 0, a \in \mathbb{R}$ definuji $x^a = \exp(a \ln x)$. Dále definuji $x^0 = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, speciálně též $0^0 = 1$.

Poznámka. Další důležité (základní) limity pro funkce $\ln x, \exp x$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0,$$

pro libovolná $a, b > 0$. Heslo: logaritmus je slabší než mocnina je slabší než exponenciála.
– Dokážeme později pomocí l’Hospitalova pravidla.

Poznámka. Různé definice symbolu mocnina:

- pro $a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = x \cdot x \dots x$ (násobeno n -krát)
- pro $-a = n \in \mathbb{N}$ je $x^a = 1/x^{-a}$ a užiři předchozí definice
- $x^0 = 1$
- pokud $a \notin \mathbb{Z}$, nezbyvá než použít definici $x^a = \exp(a \ln x)$ (která ovšem pro $a \in \mathbb{Z}$ dává stejný výsledek jako tři předchozí)

Symbol $\sqrt[k]{x}$ má zvláštní význam, určený Větou B.

Rozdíly a souvislosti: pokud $x > 0$, platí všechno tak, jak očekáváme: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, $(x^a)^b = x^{ab}$ atd.

Pokud ovšem $x < 0$, objeví se rozdíly: $\sqrt[3]{-1} = -1$, avšak $(-1)^{\frac{1}{3}}$ není definováno. Podobně $[(-1)^2]^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1$, avšak $(-1)^{2\frac{1}{4}} = (-1)^{\frac{1}{2}}$ není definováno.

Definice. (Další elementární funkce.)

$$\textcircled{1} \arcsin = \left(\sin \mid_{[-\pi/2, \pi/2]} \right)_{-1}$$

$$\textcircled{2} \arccos = \left(\cos \mid_{[0, \pi]} \right)_{-1}$$

$$\textcircled{3} \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\textcircled{4} \operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg}_{(-\pi/2, \pi/2)} \right)_{-1}$$

$$\textcircled{5} \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi$$

Definice. Funkce se nazve (na daném definičním oboru) elementární, jestliže je to:

- (1) polynom, racionální funkce, odmocnina
- (2) \sin , \cos , \exp , \ln
- (3) \arcsin , \arccos , arctg
- (4) jakákoliv další funkce, která vznikne z předchozích konečným opakováním operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Poznámky.

- funkce $\sinh x = \frac{1}{2}(\exp x - \exp(-x))$ (hyperbolický sinus) je zjevně elementární. Funkce k ní inverzní (zvaná $\operatorname{argsinh}$) ovšem také, protože $\operatorname{argsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$
- ve skutečnosti se všechny elementární funkce dají vytvořit pomocí \exp a \ln , pokud povolíme komplexní argumenty: např. $\sin x = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$, $\arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1 - x^2})$.
- příklad funkce, která není elementární (na žádném intervalu): Dirichletova funkce

4. DERIVACE

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U(x_0)$. Pokud existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 . Značíme $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ nebo $(f(x))'|_{x=x_0}$.

Terminologie: pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, jde o derivaci vlastní (konečnou), pro $f'(x_0) = \pm\infty$ je derivace nevlastní.

Poznámky.

- ekvivalentní definice derivace:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- $f(x) = g(x)$ na jistém $U(x_0)$ implikuje $f'(x_0) = g'(x_0)$
- geometrický význam: směrnice tečny grafu funkce
- derivováním vznikne z funkce $f(x)$ nová funkce $f'(x)$, která má dovoleno nabývat i hodnot $\pm\infty$

Příklady. ① $c' = 0$

② $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

③ $(\frac{1}{x^m})' = \frac{-m}{x^{m+1}}$ pro $x \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$

④ $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$

⑤ $(\ln x)' = 1/x$ pro $x > 0$

⑥ $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$

⑦ $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$, $\operatorname{sgn}'(x) = 0$ pro $x \neq 0$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na jistém $U_+(x_0)$ (respektive $U_-(x_0)$.) Pokud existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

respektive

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

nazveme ji derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 zprava (resp. zleva.)

Značíme $f'_+(x_0)$ nebo $(f(x))'_+|_{x=x_0}$ respektive $f'_-(x_0)$ nebo $(f(x))'_-|_{x=x_0}$

Opět rozlišujeme vlastní a nevlastní derivaci zleva resp. zprava.

Poznámky.

- ekvivalentní definice jednostranných derivací:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{respektive} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- z Věty 2.2 plyne ekvivalence následujících tvrzení:

(1) $f'(x_0)$ existuje a rovná se A

(2) $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ existují a rovnají se témuž A

Příklady.

① $|x|' = \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$; derivace v 0 neexistuje, neboť $(|x|)'_{\pm}|_{x=0} = \pm 1$

② $(\sqrt{x})'_+|_{x=0} = +\infty$

Věta 4.1. Nechť $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci. Pak $f(x)$ je v x_0 spojitá.

Poznámky.

- důležité je „vlastní“: $\operatorname{sgn}(x)$ má v 0 derivaci (rovnou $+\infty$), ale není tam spojitá
- platí jednostranné verze: $f(x)$ má v x_0 vlastní derivaci zprava (zleva) $\implies f(x)$ je v x_0 spojitá zprava (zleva)
- obrácená implikace zdaleka neplatí: např. $|x|$ je spojitá v 0, ale nemá tam derivaci. Lze dokonce sestřít funkci, která je spojitá všude, ale derivaci (ani jednostrannou) nemá nikde

Věta 4.2. Nechtě $f(x)$, $g(x)$ mají vlastní derivaci v x_0 . Potom

- (1) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (2) $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- (3) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- (4) jestliže $g(x_0) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Poznámky.

- platí pro jednostranné derivace
- lze použít na vícenásobné součty, součiny atd.; např. $(fgh)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$
- v případě nevlastních derivací nemusí platit, třebaže má pravá strana smysl: polož $f(x) = 1/x$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 1$. Potom $f'(0) = +\infty$, a tedy u vzorce

$$(f \cdot f)'(0) = f(0)f'(0) + f(0)f'(0)$$

je pravá strana $+\infty$, avšak derivace funkce $f \cdot f$ v bodě 0 neexistuje

Příklady.

- ① $\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- ② $(e^x \sin x)' = e^x(\cos x - \sin x)$
- ③ $(x^n)' = nx^{n-1}$ (indukcí podle n)

Lemma 4.1. Nechtě $f'(x_0) \neq 0$ (i nevlastní). Potom $f(x) \neq f(x_0)$ na jistém $P(x_0)$.

Věta 4.3. (Derivace složené funkce.) Nechtě $f(x)$ má vlastní derivaci v x_0 , nechtě $g(y)$ má vlastní derivaci v bodě $f(x_0)$. Potom

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Příklady.

- ① $[\cos(x^2)]' = -\sin(x^2) \cdot 2x$, $x \in \mathbb{R}$
- ② $(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$
- ③ $[f(ax + b)]' = af'(ax + b)$ pro každé x takové, že $f'(y)$ má v bodě $ax + b$ derivaci
- ④ $\{x^x\}' = x^x(1 + \ln x)$, $x > 0$

⑤ $|f(x)|' = f'(x) \operatorname{sgn} \{f(x)\}$, pokud $f(x) \neq 0$ a $f'(x)$ existuje vlastní

Věta 4.4. (Derivace inverzní funkce.) Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, a $f(x)$ je spojitá, ryze monotónní v I . Nechť $J = f(I)$, a $f_{-1}(y) : J \rightarrow I$ je funkce inverzní k $f(x)$. Nechť $y_0 \in J$ je vnitřní bod. Potom:

(1) Jestliže $f'(f_{-1}(y_0)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $(f_{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f_{-1}(y_0))}$.

(2) Jestliže $f'(f_{-1}(y_0)) = \pm\infty$, pak $(f_{-1})'(y_0) = 0$.

(3) Jestliže $f'(f_{-1}(y_0)) = 0$, pak $(f_{-1})'(y_0) = +\infty$ pokud $f(x)$ je rostoucí, a $(f_{-1})'(y_0) = -\infty$ pokud $f(x)$ je klesající.

Příklady. ① $(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y \in (-1, 1)$

② $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$, $y \in \mathbb{R}$

③ Pokud $n \geq 2$ je sudé, tak $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$, $y > 0$

Pokud $n \geq 3$ je liché, tak $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ pro $y \neq 0$, a $(\sqrt[n]{y})'|_{y=0} = +\infty$.

5. PRIMITIVNÍ FUNKCE.

Úmluva. V celé kapitole značí I, J otevřené intervaly.

Definice. Nechť $F(x), f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu I , jestliže $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in I$. Značíme

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{v } I.$$

Terminologie: $F(x)$ se také nazývá neurčitý integrál k $f(x)$, $f(x)$ je integrand, x je integrační proměnná.

Příklady. ① $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ v \mathbb{R} , $n \geq 0$ celé

② $\int \frac{dx}{x^n} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$, $n \geq 2$ celé

③ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, \infty)$; obecněji $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|$ v I , pokud $f'(x)$

existuje vlastní a $f(x) \neq 0$ všude v I

④ $\int e^x dx = e^x$, $\int \sin x dx = -\cos x$, $\int \cos x dx = \sin x$, vše v \mathbb{R}

⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ v $(-1, 1)$, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ v \mathbb{R}

Věta 5.1. (Linearita integrálu.)

(1)

$$\int af(x) + bg(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

v každém I , kde mají smysl integrály vpravo;

(2) Jestliže $\int f(y) dy = F(y)$ v J , pak

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b)$$

v každém I takovém, že $\{ax + b : x \in I\} \subset J$.

Věta 5.2. (Integrace per-partes.) Necht' $u(x)$, $v(x)$ mají vlastní derivace pro $\forall x \in I$. Potom

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx \quad \text{v } I,$$

existuje-li integrál vpravo. **Příklady.** ① $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$ v $(0, \infty)$

② označme $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy $I_1 = \arctg x$ v \mathbb{R} , a integrací per-partes odvodíme rekurentní vzorec

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot I_n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Věta 5.3. (1. věta o substituci.) Necht' $\int g(y) dy = G(y)$ v J , a necht' pro každé $x \in I$ je $f(x) \in J$ a existuje $f'(x)$ vlastní. Potom

$$\int g(f(x))f'(x) dx = G(f(x)) \quad \text{v } I.$$

Příklady. ① $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$ v \mathbb{R}

② $\int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x$ v \mathbb{R}

Věta 5.4. (2. věta o substituci.) Necht' $f(x)$ je definována v I , necht' $\varphi(t) : J \rightarrow I$ je vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t)$ existuje konečná a navíc je nenulová pro $\forall t \in J$. Potom: je-li

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = G(t) \quad \text{v } J,$$

pak

$$\int f(x) dx = G(\varphi_{-1}(x)) \quad \text{v } I.$$

Poznámky.

• 1. věta o substituci - schematicky:

$$\int g(f(x))f'(x) dx \left| \begin{array}{l} y = f(x) \\ dy = f'(x) dx \end{array} \right. = \int g(y) dy = G(y) = G(f(x)).$$

Používá se v případě, že integrand má speciální tvar, tj. složená funkce krát derivace vnitřní funkce. Substituovaná funkce $f(x)$ nemusí být prostá.

- 2. věta o substituci - schematicky:

$$\int f(x) dx \Big|_{\substack{x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt}} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(t) = F(\varphi^{-1}(x)).$$

V tomto případě substituovaná funkce $\varphi(t)$ musí být vzájemně jednoznačná a $\varphi'(t) \neq 0$. Druhá věta o substituci se používá hlavně v typových substitucích, viz níže.

Rozklad polynomů. Každý (nenulový) polynom $Q(x)$ lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^k (x - a_j)^{p_j}$$

kde $a_j \in \mathbb{C}$ se nazývají kořeny, p_j jejich násobnosti. Platí $\sum_{j=1}^k p_j$ rovná se stupeň $Q(x)$. Důsledek: každý (nenulový) polynom je roven nule v nejvýše konečně bodech; pokud se dva polynomy shodují v nekonečně bodech, jsou nutně totožné (mají stejné koeficienty.) Pokud má $Q(x)$ reálné koeficienty a $a = \alpha + i\beta$ je kořen násobnosti p , tak $\bar{a} = \alpha - i\beta$ je také kořen (stejně násobnosti) a platí

$$(x - a)^p (x - \bar{a})^p = [(x - a)(x - \bar{a})]^p = [x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2]^p,$$

přičemž posledně uvedený polynom druhého stupně nemá tedy žádné reálné kořeny. Tedy každý polynom s reálnými koeficienty lze rozložit

$$Q(x) = A \prod_{j=1}^m (x - a_j)^{p_j} \prod_{k=1}^n (x^2 + b_k x + c_k)^{q_k}, \quad (*)$$

kde A, a_j, b_k, c_k jsou reálná čísla, tj. a_j jsou reálné kořeny $Q(x)$ násobnosti p_j , zatímco polynomy $x^2 + b_k x + c_k$ skrývají dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti q_k .

Věta F. (Rozklad na parciální zlomky.) Nechť $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy a stupeň P je menší než stupeň Q . Nechť $Q(x)$ má rozklad (*). Potom existují jednoznačně určená čísla A_{jr}, B_{ks} a $C_{ks} \in \mathbb{R}$ tak, že

$$R(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{p_j} \frac{A_{jr}}{(x - a_j)^r} + \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{q_k} \frac{B_{ks}x + C_{ks}}{(x^2 + b_k x + c_k)^s}$$

platí pro každé x kde $Q(x) \neq 0$.

Integrace racionální funkce. Je-li dána $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, pak:

1. Pokud stupeň P je větší nebo roven stupni Q , dělením převedu na tvar

$$R(x) = p(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)},$$

kde $p(x)$, $\tilde{P}(x)$ jsou polynomy a stupeň \tilde{P} je menší než stupeň Q .

2. Funkci $\frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)}$ rozložím podle Věty F.

3. Integruji jednotlivé členy rozkladu.

Příklad.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^3 - 1} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

platí v $(-\infty, 1)$ a v $(1, \infty)$.

Typové substitute. V dalším je $R = R(u, v)$ racionální funkce dvou proměnných, tj. R je z u, v vytvořena operacemi $+$, $-$, \cdot , $/$.

①

$$\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Substituce $t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ vede na integraci racionální funkce.

Příklad:

$$\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x-1}}.$$

Polož $t = \sqrt{x-1}$, tj. $x = \varphi(t) = t^2 + 1$, $\varphi'(t) = 2t$ - předpoklady Věty 5.4 splněny ($I = (1, \infty)$, $J = (0, \infty)$); dostáváme

$$\int \frac{2t dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) + \frac{2}{t+1} \quad \text{v } J.$$

Po zpětné substituci je výsledek $2 \ln(1 + \sqrt{x-1}) + 2/(1 + \sqrt{x-1})$ v $(1, \infty)$.

②

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

Používá se substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$, tj. $x = \varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} x$. Odsud

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

což vede opět na integraci racionální funkce. Pozor: substituce dává výsledek jen pro $x \in (-\pi, \pi)$.

Příklad:

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x};$$

vede na integrál

$$\int \frac{2 dt}{t^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{3}} \right).$$

Tedy

$$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} \right);$$

platí v $(-\pi, \pi)$ a díky periodicitě v každém intervalu $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$. Pokud chci primitivní funkci na delším intervalu, musím výsledek provést slepení (zespojiténí) výsledné funkce

$$F_0(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{3}} \right).$$

Například funkce

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}, & x = \pi \\ F_0(x) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, & x \in (\pi, 3\pi) \end{cases}$$

je primitivní k $f(x) = 1/(2 + \cos x)$ v intervalu $(-\pi, 3\pi)$. Pro $x \neq \pi$ je $F_1'(x) = f(x)$ zjevné, v bodě $x = \pi$ to elegantně vyřešíme pomocí pozdějšího Lemmatu 6.2.

③

$$\int R(\exp(ax)) dx$$

se převede na integraci racionální funkce substitucí $t = \exp(ax)$, $dx = dt/at$.

④

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Pokud $a < 0$, lze BÚNO předpokládat, že $p(x) = ax^2 + bx + c$ má reálné kořeny. Prepíšeme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)} = \pm(x - \mu) \sqrt{\frac{a(x - \lambda)}{x - \mu}},$$

čímž obdržíme integrál typu ①. Příklad:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

kde $a < b$. Upravíme:

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \frac{1}{x-a} \underbrace{\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}}_t$$

odtud $x = \frac{t^2 b + a}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2t(b-a)}{(t^2+1)^2} dt$, integrál po substituci

$$\int \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t,$$

výsledek je $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$, platí v (a, b) .

Pro $a > 0$ použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}.$$

Ta vede opět na racionální funkci, navíc lze dokázat, že splňuje předpoklady Věty 5.4. na všech intervalech, kde je $p(x) > 0$. Příklad:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}},$$

substituce

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + x + 1} &= t - x \\ x^2 + x + 1 &= t^2 - 2tx + x^2 \\ x &= \frac{t^2 - 1}{2t + 1}, \quad dx = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt \\ \sqrt{x^2 + x + 1} &= t - x = \frac{t^2 + t + 1}{2t + 1}\end{aligned}$$

Integrál po substituci

$$\int \frac{2dt}{t^2 - 1} = \int \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt = \ln |t - 1| - \ln |t + 1|,$$

výsledek lze zapsat jako

$$\ln \frac{|\sqrt{x^2 + x + 1} + x - 1|}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + 1},$$

platí v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Poznámka. (Integrál a derivace komplexních funkcí.)

Nechť $F(x), f(x) : I \rightarrow \mathbb{C}$. Potom $F'(x) = f(x)$ značí

$$\{\operatorname{Re} F(x)\}' = \operatorname{Re} f(x), \quad \{\operatorname{Im} F(x)\}' = \operatorname{Im} f(x).$$

Stejný význam má $\int f(x) dx = F(x)$.

Díky vzorečku (dokážeme později při přesnějším zavedení elementárních funkcí)

$$\exp[(\alpha + i\beta)x] = \exp(\alpha x)[\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)]$$

vyplývá, že $\exp(ax)' = a \exp(ax)$, a také

$$\int \exp(ax) dx = \frac{\exp(ax)}{a}$$

platí pro $a \in \mathbb{C}$. Rozkladem na reálnou a imaginární část získáme užitečné vztahy

$$\begin{aligned}\int \exp(\alpha x) \cos(\beta x) dx &= \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x)], \\ \int \exp(\alpha x) \sin(\beta x) dx &= \frac{\exp(\alpha x)}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x)].\end{aligned}$$

6. HLUBŠÍ VLASTNOSTI DERIVACE A SPOJITOSTI.

Úmluva. V celé kapitole značí I, J intervaly (libovolného typu.)

Lemma 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá (resp. spojitá zprava, zleva) v bodě x_0 . Potom $f(x)$ je omezená na jistém $U(x_0)$ (resp. $U_+(x_0), U_-(x_0)$.)

Věta 6.1. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I . Potom $f(x)$ je na I omezená.

Poznámka. Předpoklady nelze oslabit:

- $f(x) = 1/x$ je spojitá na $(0, 1]$, ale není omezená (interval není uzavřený)
- $f(x) = 1/x$ pro $x \in (0, 1]$, $f(0) = 0$ není omezená na $[0, 1]$ (funkce není spojitá v 0 zprava)

Definice. Nechť $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 vzhledem k I

- maximum (podrobně: globální maximum), je-li $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
- lokální maximum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
- ostré lokální maximum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) > f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.

Analogicky: řekneme, že $f(x)$ má v bodě x_0 vzhledem k I

- minimum (podrobně: globální minimum), je-li $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I$.
- lokální minimum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro $\forall x \in I \cap U(x_0, \delta)$.
- ostré lokální minimum, jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že $f(x_0) < f(x)$ pro $\forall x \in I \cap P(x_0, \delta)$.

Souhrnný název pro maximum a minimum: extrém.

Věta 6.2. Nechť $f(x)$ je spojitá na omezeném, uzavřeném intervalu I . Pak existuje $x_0 \in I$ bod globálního maxima.

Poznámky. ① Předpoklady opět nelze oslabit:

- $f(x) = x$ je na $(0, 1)$ spojitá, ale maxima/minima nikde nenabývá
- $f(x) = \frac{x \sin x}{x+1}$ - má v $[0, \infty)$ nekonečně mnoho (ostrých) lokálních extrémů, ale žádné globální

② Zrcadlová verze: $f(x)$ spojitá na omezeném, uzavřeném I zde nabývá svého minima.

Věta 6.3. Nechť $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$. Je-li x_0 vnitřní bod I a $f'(x_0)$ existuje a je nenulová, pak v x_0 není (lokální) extrém (vůči I).

Důsledek. Je-li v bodě $x_0 \in I$ (lokální) extrém, pak nutně buď (i) x_0 je krajní bod, nebo (ii) $f'(x_0)$ neexistuje, nebo (iii) $f'(x_0) = 0$.

Příklady. ① $f(x) = |x|$ má v 0 globální minimum, avšak $f'(0)$ není nula (tato derivace neexistuje)

② $f(x) = x^3$ pro $x \in I = [-1, 1]$. Maximum je v $x = 1$, minimum v -1 , ale v žádném z těchto bodů není $f'(x) = 0$. Naproti tomu $f'(0) = 0$, avšak 0 není (ani lokální) extrém. Z příkladů je vidět, že ani jedna z implikací

$$\begin{aligned} f'(x_0) = 0 &\implies x_0 \text{ je (lokální) extrém} \\ x_0 \text{ je (lokální) extrém} &\implies f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

obecně neplatí!

Věta 6.4. (Rolleova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$, nechť $f(a) = f(b)$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Věta 6.5. (Lagrangeova.) Nechť $f(x)$ je spojitá v $[a, b]$ a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Příklad. $\ln x < x - 1$ pro $\forall x > 1$.

Věta 6.6. Nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 , nechť existuje $f'(x)$ vlastní na jistém $P(x_0)$. Potom

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x),$$

má-li pravá strana smysl. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 zprava, nechť existuje $f'(x)$ vlastní na jistém $P_+(x_0)$. Potom

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x),$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ①

$$\arcsin'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty.$$

② $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Pro $x \neq \pm 1$ je $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ a tedy

$$f'(\pm 1) = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = \pm \infty.$$

Lemma 6.2. (O lepení primitivní funkce.) Nechť $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Nechť $F(x)$, $f(x)$ jsou spojité v bodě x_0 . Potom též $F'(x_0) = f(x_0)$, a tedy celkem $\int f(x)dx = F(x)$ v intervalu (a, b) .

Definice. Řekneme, že $f(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost, jestliže platí: pokud γ leží mezi $f(a)$, $f(b)$, kde $a, b \in I$, pak existuje c mezi a, b takové, že $f(c) = \gamma$.

Poznámka. Věta 2.16. tedy říká: funkce spojitá v intervalu zde má Darbouxovu vlastnost.

Věta 6.7.² Nechť $f(x)$ je spojitá v otevřeném intervalu I a nechť $f'(x)$ existuje pro $\forall x \in I$. Potom $f'(x)$ má v I Darbouxovu vlastnost.

Poznámky.

- Derivace spojitě funkce nemusí být obecně spojitá - avšak podle předchozí věty má aspoň Darbouxovu vlastnost.
- Pokud $f(x)$ nemá Darbouxovu vlastnost, nemá ani primitivní funkci (např. funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$).

Věta 6.8. (Cauchyho.) Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou spojitě v $[a, b]$. Nechť pro $\forall x \in (a, b)$ existují vlastní $f'(x)$, $g'(x)$ a navíc $g'(x) \neq 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Věta 6.9.³ (l'Hospitalovo pravidlo.) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť $f'(x)$, $g'(x)$ existují vlastní, navíc $g'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in P(x_0, \delta)$. Nechť platí buď

(a) $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow x_0$

nebo

(b) $|g(x)| \rightarrow +\infty$ pro $x \rightarrow x_0$.

Potom

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

②

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-ax^{-a-1}} = 0. \quad (a > 0)$$

③ $\frac{x}{2x + \sin x} \rightarrow 1/2$, pro $x \rightarrow +\infty$. Avšak $\frac{1}{2 + \cos x}$ limitu v $+\infty$ nemá. Příklad ukazuje, l'Hospitalovo pravidlo není ekvivalentní výpočet limity: $f(x)/g(x)$ limitu může mít, i když $f'(x)/g'(x)$ jí nemá.

④ příklad, kde v zásadě l'Hospital použít jde, ale je to mnohem pracnější, než přímé použití základních limit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x \ln(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos x \ln(1 + x^2) + \sin x \frac{2x}{x^2 + 1}} = \dots$$

Věta 6.10. (Monotonie a znaménko derivace.) Nechť I je interval (libovolného typu). Nechť $f(x)$ je spojitá v I , a nechť $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) \geq 0$ resp. $f'(x) \leq 0$ resp.

²Bez důkazu.

³Důkaz jen části (a).

$f'(x) < 0$) pro všechny *vnitřní* body I . Potom $f(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) v I .

Příklad. $f(x) = x^n$. Protože $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, \infty)$, je $f(x)$ rostoucí v $[0, \infty)$. (Srovnej důkaz Věty B.)

Důsledek. Nechť I je interval (libovolného typu). Nechť $f(x)$ je spojitá v I , a nechť $f'(x) \neq 0$ pro $\forall x \in I$ vnitřní. Potom $f(x)$ je ryze monotónní v I .

Definice. Funkce $f(x)$ se nazve konvexní v I , jestliže pro $\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I$ platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Pokud místo \leq požadujeme $<$ resp. \geq resp. $>$, jde o funkci ryze konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní.

Poznámka. Funkce $f(x)$ je konvexní v I , právě když pro $\forall a < b \in I$ a pro $\forall \lambda \in (0, 1)$ platí

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Věta 6.11. (Konvexita a monotonie derivace.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I , a nechť $f'(x)$ je rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající) *uvnitř* I . Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I .

Příklad. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Pro $x \in (-\infty, 0)$ je $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ a tato funkce v $(-\infty, 0)$ klesá. Původní funkce je spojitá (dokonce v \mathbb{R}), tedy $f(x)$ je ryze konvexní v $(-\infty, 0]$. Analogicky: je ryze konvexní v $[0, \infty)$. Přesto není konvexní v \mathbb{R} .

Snadno si rozmyslím, že $f(x)$ rostoucí v $(a, b]$, $f(x)$ rostoucí v $[b, c)$ implikuje $f(x)$ rostoucí v (a, c) – pro konvexitu tedy analogická úvaha neplatí.

Věta 6.12. (Konvexita a znaménko druhé derivace.) Nechť $f(x)$ je spojitá v I , a nechť $f''(x)$ existuje konečná a $f''(x) > 0$ (resp. $f''(x) \geq 0$ resp. $f''(x) \leq 0$ resp. $f''(x) < 0$) pro všechny *vnitřní* body I . Potom $f(x)$ je ryze konvexní (resp. konvexní resp. konkávní resp. ryze konkávní) v I .

Definice. Řekneme, že x_0 je inflexní bod funkce $f(x)$, jestliže

(i) existuje $f'(x_0)$

(ii) existuje $\delta > 0$ tak, že na jednom z intervalů $(x_0, x_0 + \delta)$, $(x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x)$ ryze konvexní a na druhém ryze konkávní.

Příklady. ① $f(x) = \sin x$ má v $x = 0$ inflexní bod.

② $f(x) = x^2$ pro $x < 0$, a $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \geq 0$. Potom $f(x)$ je ryze konvexní na $(-\infty, 0]$, ryze konkávní na $[0, \infty)$ – ovšem $x = 0$ není dle naší definice inflexní bod: derivace $f'(0)$ neexistuje.

7. POSLOUPNOSTI.

Definice. Posloupnost je funkce $a(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž místo $a(n)$ píšeme a_n . Celou posloupnost značíme $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ nebo krátce $\{a_n\}$.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n$, $c_n = \frac{n^n}{n!} \dots$

② rekurentně: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; nebo $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) [n \geq n_0 \implies a_n \in U(a, \varepsilon)].$$

Značíme $a_n \rightarrow a$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Terminologie: pokud posloupnost má konečnou (vlastní) limitu, říkáme, že konverguje.

Pokud $a_n \rightarrow \pm\infty$, říkáme, že $\{a_n\}$ diverguje do $\pm\infty$.

Poznámky.

• $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ lze ekvivalentně vyjádřit jako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) [n \geq n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon].$$

• užitečné je následující pozorování: $a_n \rightarrow a$ právě když platí: pro každé $\varepsilon > 0$ pevné je $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro všechna n až na konečně výjimek.

Příklady. ① $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

② $b_n = (-1)^n$ nemá limitu.

Poznámky. Platí analogie vět pro limity funkcí (nebudeme dokazovat):

(i) Jestliže $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b$, pak

$$a_n + b_n \rightarrow a + b$$

$$a_n b_n \rightarrow ab$$

$$a_n/b_n \rightarrow a/b$$

má-li výraz napravo smysl (srovnej VoAL: Věty 2.3, 2.7.)

(ii) Jestliže $\alpha \leq a_n \leq \beta$ pro $\forall n$, a platí $a_n \rightarrow a$, je také $\alpha \leq a \leq \beta$. Srovnej s Větou 2.9.

(iii) Je-li $b_n \leq a_n \leq c_n$ pro $\forall n$, a platí $b_n \rightarrow a$, $c_n \rightarrow a$, je také $a_n \rightarrow a$. Viz Věta 2.10 ("o dvou policajtech").

(iv) Jestliže $a_n \rightarrow 0$, a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, je $a_n b_n \rightarrow 0$. Srovnej s Větou 2.4.

Definice. Posloupnost $\{a_n\}$ se nazve omezená, jestliže $\exists K > 0$ tak, že $|a_n| \leq K$ pro $\forall n$. Posloupnost se nazve rostoucí (resp. neklesající resp. nerostoucí resp. klesající), platí-li $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n \leq a_{n+1}$ resp. $a_n \geq a_{n+1}$ resp. $a_n > a_{n+1}$) pro $\forall n$.

Věta 7.1. Konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 7.2. Nechť $\{a_n\}$ je monotónní. Potom $\{a_n\}$ má limitu. Je-li navíc omezená, pak konverguje (tj. má konečnou limitu.)

Definice. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ se nazve hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže pro $\forall \varepsilon > 0$ pevné nastává $a_n \in U(a, \varepsilon)$ pro nekonečně mnoho n .

Poznámky.

• $a_n = (-1)^n$ má dva hromadné body: $+1$ a -1 .

- $b_n = \sin n \dots$ dá se ukázat, že hromadné body tvoří interval $[-1, 1]$.
- jestliže $a_n \rightarrow a$, tak a je hromadný bod, a je to jediný hromadný bod.

Definice. Je dána posloupnost $\{a_n\}$. Řekneme, že $\{b_n\}$ je podposloupnost $\{a_n\}$ (neboli posloupnost vybraná z $\{a_n\}$), existuje-li rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že $b_n = a_{k_n}$.

Věta 7.3. Číslo a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$, právě když z $\{a_n\}$ lze vybrat podposloupnost, jejíž limita je a .

Věta 7.4. (Bolzano-Weierstrassova.) Nechť $\{a_n\}$ je omezená. Potom $\{a_n\}$ má hromadný bod v \mathbb{R} .

Důsledek. Nechť $\{x_n\}$ splňuje $x_n \in [a, b]$ pro $\forall n$. Potom existuje bod $x_0 \in [a, b]$ a podposloupnost $\{\tilde{x}_n\}$ taková, že $\tilde{x}_n \rightarrow x_0$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (neboli je cauchyovská), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) [m, n \geq n_0 \implies |a_m - a_n| < \varepsilon].$$

Věta 7.5. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) posloupnost $\{a_n\}$ konverguje.
- (2) posloupnost $\{a_n\}$ je cauchyovská.

Poznámka. V teorii je podstatné, zda posloupnost konverguje nebo nekonverguje, zatímco konkrétní hodnota limity nás nezajímá. A zde je užitečnost B.C. podmínky: umí rozhodnout, zda posloupnost konverguje, aniž hovoří o její limitě.

Věta 7.6. (Heine.) Nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P(x_0)$. Potom je ekvivalentní:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.
- (2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
 - (i) $x_n \rightarrow x_0$
 - (ii) $x_n \neq x_0$ pro $\forall n$

platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A .

Poznámka. Jednostranná verze: nechť $f(x)$ je definována na nějakém $P_+(x_0)$. Potom je ekvivalentní:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$.
- (2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
 - (i) $x_n \rightarrow x_0$
 - (ii) $x_n > x_0$ pro $\forall n$

platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu A .

Poznámka. Analogicky platí: $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 , právě když pro každou posloupnost, splňující $x_n \rightarrow x_0$, platí, že $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Věta 7.7. (Heineho pro spojitost v intervalu.) Nechť $f(x)$ je definována v intervalu I . Potom je ekvivalentní:

- (1) $f(x)$ je spojitá v I .
 (2) pro každou posloupnost $\{x_n\}$, splňující
 (i) $x_n \rightarrow x_0$
 (ii) $x_0 \in I, x_n \in I$ pro $\forall n$
 platí, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ má limitu $f(x_0)$.

Příklady. ① Důležitá limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

② Neexistující limita:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x.$$

③ Rekurentně zadaná posloupnost $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ má limitu 2.

8. TAYLORŮV POLYNOM.

Definice. Nechť $f(x), g(x)$ jsou definovány na nějakém $P(x_0)$. Řekneme, že $f(x)$ je "malé $o(g(x))$ " pro $x \rightarrow x_0$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Značíme: $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$.

Řekneme, že $f(x)$ je "velké $O(g(x))$ " pro $x \rightarrow x_0$, jestliže existují $C > 0, \delta > 0$ tak, že

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in P(x_0, \delta).$$

Značíme: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$.

Řekneme, že $f(x)$ je řádově rovno $g(x)$ pro $x \rightarrow x_0$, jestliže limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existuje a je konečná a nenulová. Značíme: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$.

Poznámky. Neformálně řečeno, tyto symboly značí (pro x velmi blízko x_0):

$f(x) = o(g(x))$... $f(x)$ je mnohem menší než $g(x)$

$f(x) = O(g(x))$... $f(x)$ lze odhadnout (konstanta krát) $g(x)$

$f(x) \sim g(x)$... $f(x), g(x)$ se chovají v zásadě stejně.

Příklady. ① $\ln x = o(\sqrt{x}), x \rightarrow \infty$.

② $\frac{\sin x}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), x \rightarrow \infty$.

③ $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim x^2, \ln(1+x) \sim x$, vše pro $x \rightarrow 0$.

Definice. Funkce $f(x)$ je dána. Potom k -tou derivaci $f(x)$ značíme $f^{(k)}(x)$ nebo $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$ a definujeme jí induktivně takto:

(i) $f^{(0)}(x) = f(x)$, neboli funkci považujeme za nultou derivaci sebe sama;

(ii) $f^{(k+1)} = \{f^{(k)}(x)\}'$, speciálně $f^{(1)}(x) = f'(x), f^{(2)}(x) = f''(x)$ atd.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována na otevřeném intervalu I . Řekneme, že $f(x)$ je třídy C^n na I , jestliže derivace $f^{(k)}(x)$ existují a jsou spojité na I pro každé $k = 0, 1, \dots, n$. Značíme $f(x) \in C^n(I)$. Speciálně, $C^0(I) = C(I)$ je množina všech funkcí spojitých na I . Symbolem $C^\infty(I)$ značíme třídu funkcí, pro něž derivace všech řádů existují a jsou spojité na I .

Poznámka. Idea aproximace funkce polynomem spočívá v následujícím: je dána funkce $f(x)$ na okolí bodu x_0 . Sestrojíme polynom $p(x)$ tak, že

$$\begin{aligned} p(x_0) &= f(x_0) \\ p'(x_0) &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ p^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Ukazuje se, že $p(x)$ funkci v blízkosti bodu x_0 dobře aproximuje - tím lépe, čím je větší n . Např. funkce $f(x) = \cos(x)$ v blízkosti bodu 0. Máme $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Stejnou hodnotu, první a druhou derivaci v nule má polynom $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, který také funkci $\cos x$ blízko počátku - jak vidno z grafu - dobře aproximuje.

Definice. Pro x_0 pevné a $k \geq 0$ celé definujeme

$$Q_{k,x_0}(x) = \frac{1}{k!}(x - x_0)^k.$$

Speciálně $Q_{0,x_0}(x) = 1$ (díky úmluvě $0! = 1$, $(x - x_0)^0 = 1$), $Q_{1,x_0}(x) = x - x_0$, $Q_{2,x_0}(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2$, atd.

Lemma 8.1. Pro funkce $Q_{k,x_0}(x)$, definované výše, platí:

- (1) $Q_{k,x_0}(x)$ je polynom stupně k
- (2) $Q'_{0,x_0}(x) = 0$ a $Q'_{k,x_0}(x) = Q_{k-1,x_0}(x)$ pro $\forall k \geq 1$
- (3) $Q_{k,x_0}^{(l)}(x_0)$ je rovno 1 pro $k = l$, zatímco pro $k \neq l$ je to 0

Definice. Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$. Potom výraz

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazveme n -tý Taylorův polynom funkce $f(x)$ o středu x_0 . Značíme $T_{x_0,n}^f(x)$.

Věta 8.1. [Aproximační vlastnost Taylorova polynomu.] Nechť $f(x)$ je třídy C^n na nějakém $U(x_0)$, nechť $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$f(x) - T_{x_0,n}^f(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

Navíc $T_{x_0,n}^f(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n , který má tuto vlastnost.

Příklady. ① $T_{0,n}^{\exp x}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$. Tedy

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

② $T_{0,2n+1}^{\sin x}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, neboli

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0.$$

③ $f(x) = (1+x)^a$, kde $a \in \mathbb{R}$ je pevné. Potom

$$T_{0,n}^{f(x)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k.$$

Tedy

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Poznámka. Pro $a \in \mathbb{R}$ a $k \geq 0$ celé definujeme zobecněné kombinační číslo jako

$$\binom{a}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} & k \geq 1 \end{cases}$$

Pro $n \geq k \geq 0$ celá čísla je to ve shodě s původní definicí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Taylorův rozvoj $(1+x)^a$ můžeme elegantně napsat jako

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + o(x^n).$$

Všimněte si analogie s binomickou formulí.

Věta 8.2. (Derivace a integrál Taylorova polynomu.) Nechť $F(x)$ je C^{n+1} na otevřeném intervalu I , a $x_0 \in I$ je pevné. Nechť $f(x) = F'(x)$ v I . Potom

(1)

$$\left\{ T_{x_0, n+1}^F(x) \right\}' = T_{x_0, n}^f(x).$$

(2) Naopak: při vhodné volbě integrační konstanty $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\int T_{x_0, n}^f(x) dx = T_{x_0, n+1}^F(x) + c.$$

Příklady. ①

$$T_{0,2n}^{\cos x}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

②

$$T_{0,n}^{\ln(1+x)}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Věta 8.3. (Početní pravidla pro malé o .)

(1) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \rightarrow 0$, kde $m \geq n$. Potom $af(x) + bg(x) = o(x^n)$ pro $x \rightarrow 0$.

(2) Nechť $f(x) = o(x^n)$, $g(x) = o(x^m)$ pro $x \rightarrow 0$. Potom $f(x)g(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \rightarrow 0$.

(3) Nechť $f(x) = o(x^n)$ pro $x \rightarrow 0$. Potom $x^m f(x) = o(x^{m+n})$ pro $x \rightarrow 0$.

(4) Nechť $f(x) = o(x^n)$ a nechť $g(x) \sim x^m$ pro $x \rightarrow 0$, kde $m \geq 1$. Potom $f(g(x)) = o(x^{mn})$ pro $x \rightarrow 0$.

Poznámka. Stručně můžeme předchozí pravidla vyjádřit takto:

$$o(x^n) + o(x^m) = o(x^n) \text{ pokud } m \geq n$$

$$o(x^n)o(x^m) = o(x^{m+n})$$

$$x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$$

Všimněte si, že $o(x^n) - o(x^n)$ se rovná $o(x^n)$ (a ne tedy 0). To chápeme takto: rozdíl dvou funkcí, které obě jsou malé o x^n je opět nějaká funkce, která je malé o x^n .

Příklady. ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \frac{-1}{3}$$

②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{1+x^2} - 3\sqrt[3]{1+x^3} + 2\sqrt[4]{1+x^4}) = \frac{1}{2}$$

Definice. Nechť $f(x) \in C^n(I)$, kde I je otevřený interval a $x_0 \in I$ je pevné. Výraz

$$R_{x_0, n+1}^f(x) := f(x) - T_{x_0, n}^f(x)$$

se nazývá Taylorův zbytek funkce f po n -tém členu o středu x_0 .

Poznámka. Z předchozího víme, že $R_{x_0, n+1}^f(x) = o((x - x_0)^n)$ pro $x \rightarrow x_0$, tj. $R_{n+1}(x)$ je malé, pokud x se blíží x_0 .

Nyní nás zajímá jiný problém - totiž zda také $R_{x_0, n+1}^f(x) \rightarrow 0$, pokud x je pevné, zatímco n se zvětšuje. K tomu slouží následující věta.

Věta 8.4. [Odhad zbytku Taylorova polynomu.] Nechť $f(x) \in C^{n+1}(I)$, kde I je otevřený interval a $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$ jsou zvolena pevně. Potom mezi x , x_0 existuje θ takové, že

$$R_{x_0, n+1}^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (\text{L})$$

Dále existuje θ mezi x , x_0 takové, že

$$R_{x_0, n+1}^f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{n!} (x - \theta)^n (x - x_0). \quad (\text{C})$$

Výraz vpravo se nazývá Lagrangeův resp. Cauchyův tvar zbytku.

9. URČITÝ INTEGRÁL.

Motivace. Studujeme následující problém: je dána funkce $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, a my chceme najít číslo, které vyjadřuje plochu pod jejím grafem. Tato hodnota se nazývá určitý integrál a značí se

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Přirozené požadavky na určitý integrál:

$$(I1) \int_a^b c dx = c(b - a)$$

$$(I2) \int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \text{ (linearita)}$$

$$(I3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \text{ (intervalová aditivita)}$$

$$(I4) f(x) \geq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx \text{ (monotonie)}$$

Existuje vícero způsobů, jak definovat integrál. Ty se neliší hodnotou výsledku, nýbrž třídou funkcí, které se jimi dají integrovat. Stručně probereme dva přístupy: Newtonův integrál a Riemannův integrál. Ukážeme, že pro spojitě funkce dávají stejné výsledky.

Opakuj. Je-li dána $f(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, pak $F(x)$ se nazývá primitivní funkce (zkratka p.f.) k $f(x)$ v (a, b) , pokud $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$.

Definice. Nechť $F(x)$ je definována v (a, b) . Výraz

$$\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$$

nazýváme zobecněným přírůstkem funkce $F(x)$ od a do b . Značíme $[F(x)]_a^b$ nebo $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Poznámky.

- je-li $F(x)$ spojitá v $[a, b]$, je $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- situace, kdy $[F(x)]_a^b$ nemá smysl: 1. některá z limit $F(b-)$, $F(b+)$ neexistuje, 2. tyto limity sice existují, ale výraz $F(b-) - F(a+)$ je typu $\infty - \infty$.

Definice. Nechť $f(x)$ je definována v (a, b) , a nechť $F(x)$ je p.f. k $f(x)$ v (a, b) . Potom Newtonův integrál funkce $f(x)$ od a do b definujeme jako

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b,$$

má-li pravá strana smysl.

Příklady. ① $(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$

② $(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3$

③ $(\mathcal{N}) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) dx$ neexistuje

Terminologie a značení. Množinu těch funkcí, pro které Newtonův integrál od a do b existuje a je konečný, značíme $\mathcal{N}(a, b)$. Množinu těch funkcí, pro které integrál existuje (a může být konečný nebo nekonečný), značíme $\mathcal{N}^*(a, b)$.

Lemma 9.0. Nechť $F_1(x), F_2(x) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité a nechť pro $\forall x \in (a, b)$ existují $F_1'(x), F_2'(x)$ vlastní a rovnají se. Potom existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F_2(x) = F_1(x) + c$, pro $\forall x \in (a, b)$.

Důsledky. ① primitivní funkce je (na souvislém intervalu) určena jednoznačně až na konstantu

② definice Newtonova integrálu je korektní (tj. nezávisí na volbě primitivní funkce)

Poznámky.

- lze dokázat, že N.i. má očekávané vlastnosti: linearita, intervalová aditivita, monotonie (za vhodných předpokladů)

- kdy neexistuje $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx$? Buď neexistuje p.f., nebo výraz $[F(x)]_a^b$ nemá smysl.

Definice. Dělením D intervalu $[a, b]$ rozumíme konečnou posloupnost bodů $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, kde $x_0 = a, x_n = b$.

Je-li $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ omezená funkce, definujeme pro $i = 1 \dots n$

$$m_i = \inf \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup \{f(x); x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Čísla

$$s(D, f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme dolní resp. horní Riemannův součet funkce $f(x)$, příslušný k dělení D .

Definice. Nechť $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce. Potom

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx := \sup \{s(D); D \text{ je dělení } [a, b]\}$$

se nazývá dolní Riemannův integrál f na $[a, b]$. Analogicky,

$$(\mathcal{R}) \int_a^{\bar{b}} f(x) dx := \inf \{S(D); D \text{ je dělení } [a, b]\}$$

se nazývá horní Riemannův integrál f na $[a, b]$.

Definice. Jestliže

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{R}) \int_a^{\bar{b}} f(x) dx,$$

pak toto číslo nazýváme Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b , a značíme

$$(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx.$$

Říkáme, že $f(x)$ má Riemannův integrál (je Riemannovsky integrovatelná) na $[a, b]$, píšeme $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Příklady. ① $(\mathcal{R}) \int_0^1 x^2 dx = 1/3$.

② Dirichletova funkce není Riemannovsky integrovatelná.

Definice. Řekneme, že dělení \tilde{D} je zjemněním dělení D , pokud \tilde{D} obsahuje všechny body D . Značíme $D \subset \tilde{D}$.

Lemma 9.1. Nechť $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce, nechť D, \tilde{D}, D_1 a D_2 jsou dělení $[a, b]$.

(1) Je-li $D \subset \tilde{D}$, pak $s(D, f) \leq s(\tilde{D}, f)$ a $S(\tilde{D}, f) \leq S(D, f)$.

(2) Označíme-li $m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}$ $M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$, je

$$m(b-a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq M(b-a)$$

pro libovolná D_1, D_2 .

Důsledek. Nechť $c_1 \leq f(x) \leq c_2$ pro $\forall x \in [a, b]$. Potom

$$c_1(b-a) \leq (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx \leq (\mathcal{R}) \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \leq c_2(b-a).$$

Speciálně, je-li $f(x) = c$ pro $\forall x \in [a, b]$, je $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx = c(b-a)$.

Geometrický význam R.i. Nechť \mathcal{P} je plocha pod grafem funkce f . Z obrázku je zřejmé, že $s(D, f) \leq \mathcal{P}$ pro každé dělení, a tedy přechodem k supremu $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx \leq \mathcal{P}$.

Analogicky, pro každé dělení je $S(D, f) \geq \mathcal{P}$, a tedy $(\mathcal{R}) \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \geq \mathcal{P}$. Je-li tedy f Riemannovsky integrovatelná, nezbyvá než $\mathcal{P} = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx$.

Lemma 9.2. $f \in \mathcal{R}(a, b)$, právě když je splněna podmínka

$$(P.R.) \quad (\forall \eta > 0) (\exists \text{ dělení } D) \left[S(D, f) - s(D, f) < \eta \right].$$

Věta 9.1. [R.i. a monotónní funkce.] Nechť f je monotónní, omezená v $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Lemma 9.3. Nechť f je spojitá v $[a, b]$. Potom je zde tzv. stejnoměrně spojitá, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in [a, b]) \left[|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right].$$

Definice. Normou dělení D rozumíme velikost největšího dílku, tj.

$$\|D\| = \max \{|x_i - x_{i-1}|, i = 1, \dots, n\}$$

Dělení se nazve kótované, je-li definována n -tice bodů $\tau : \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n$ (tzv. kóty) takových že $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pro $i = 1, \dots, n$.

V tomto případě definujeme tzv. kótovaný Riemannův součet (podrobněji: Riemannův součet funkce f , příslušný dělení D s kótami τ) jakožto

$$\mathcal{S}(D, \tau, f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Věta 9.2. [R.i. a spojitě funkce.] Nechť f je spojitá v $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Za druhé, je-li $\{D^m\}$ libovolná posloupnost (kótovaných) dělení takových, že $\|D^m\| \rightarrow 0$ pro $m \rightarrow \infty$, pak posloupnosti $s(D^m, f)$, $S(D^m, f)$ a $\mathcal{S}(D^m, \tau^m, f)$ konvergují k $(\mathcal{R})\int_a^b f(x) dx$ pro $m \rightarrow \infty$.

Věta 9.3. [Linearita R.i.] Nechť f, g jsou spojitě v $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom

$$(\mathcal{R})\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \cdot (\mathcal{R})\int_a^b f(x) dx + \beta \cdot (\mathcal{R})\int_a^b g(x) dx$$

Věta 9.4. [Intervalová aditivita R.i.] Nechť f je spojitá v $[a, b]$, nechť $c \in (a, b)$. Potom

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x) dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x) dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x) dx$$

Dodatek k definici R.i. Pro $b < a$ definujeme

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x) dx := -(\mathcal{R})\int_b^a f(x) dx.$$

má-li pravá strana smysl. Dále klademe $(\mathcal{R})\int_a^a f(x) dx = 0$.

Poznámka. S výše uvedeným dodatkem platí Věta 9.4 v tomto obecnějším tvaru: je-li f spojitá v intervalu I , a čísla $a, b, c \in I$ jsou libovolná, pak platí:

$$(\mathcal{R})\int_a^c f(x) dx + (\mathcal{R})\int_c^b f(x) dx = (\mathcal{R})\int_a^b f(x) dx.$$

Věta 9.5. [Monotonie R.i.] Nechť f, g jsou spojitě v $[a, b]$. Potom

1. Je-li $f(x) \geq g(x)$ pro $\forall x \in [a, b]$, pak

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x) dx \geq (\mathcal{R})\int_a^b g(x) dx$$

Speciálně, $f(x) \geq 0$ v $[a, b]$ implikuje $(\mathcal{R})\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

2.

$$\left| (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx \right| \leq (\mathcal{R}) \int_a^b |f(x)| dx$$

Poznámka. Ve Větech 9.3, 9.4 a 9.5 by stačilo předpokládat existenci Riemannova integrálu.

Věta 9.6. [R.i. s proměnnou horní mezí.] Nechť f je spojitá v intervalu I , necht' $x_0 \in I$ je pevné. Definujme

$$F(x) := (\mathcal{R}) \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in I.$$

Potom:

1. $F(x)$ je spojitá v I .
2. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in I$ vnitřní.

.....
Důsledky. ① Nechť $f(x)$ je spojitá v (a, b) . Potom $f(x)$ má v (a, b) primitivní funkci.

② Je-li f spojitá v $[a, b]$, pak $(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx$.

③ Je-li $f \in C^1(a, b)$, pak $f(x_1) - f(x_0) = (\mathcal{R}) \int_{x_0}^{x_1} f'(x) dx$ pro libovolná $x_0, x_1 \in (a, b)$.

Poznámka. Otázka „má daná $f(x)$ primitivní funkci?“ má dva aspekty:

- čistě teoreticky, odpověď je ANO, pokud $f(x)$ je spojitá, (viz Důsledek ① výše). Naproti tomu odpověď je NE, pokud $f(x)$ nemá Darbouxovu vlastnost (díky Věte 6.7.)
- z praktického hlediska zní otázka malinko jinak: dokáží danou p.f. napsat vzorečkem (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí)? A to v mnoha případech není možné.

Často uváděný příklad: funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ určitě má p.f. (je spojitá), ale dá se dokázat, že tato primitivní funkce se NEDÁ vyjádřit pomocí elementárních funkcí.