X. Úvod do teorie množin

Definice. Množina A se nazve spočetná ("countable"), jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi A a $\mathbb{N}$. Názorně: prvky A lze srovnat do prosté posloupnosti $A = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Příklady. ① triviálně $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$; množina všech prvočísel, množina všech sudých čísel. Obecně každá nekonečná podmnožina $\mathbb{Z}$ je spočetná.
② množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Značení. $\langle a, b\rangle$ ... uspořádaná dvojice, $A \times B$ ... kartézský součin množin A, B, tj.

$$A \times B = \big\{\langle a, b\rangle;\ a \in A,\ b \in B\big\}$$

Dále $\mathcal{P}X$ značí potenční množinu X, tj. systém všech podmnožin X. Symbolem B^A rozumíme systém všech funkcí z A do B.

Věta X.1 (1) Jsou-li A, B spočetné, je $A \times B$ spočetná.
(2) Jsou-li pro $\forall j \in \mathbb{N}$ množiny A_j spočetné, je $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ spočetná.

Věta X.2. (1) Množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je nespočetná.
(2) Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Důsledky. Množiny $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ resp. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tj. systémy všech posloupností reálných resp. přirozených čísel jsou nespočetné.

Poznámky. Ve světě teorie množin je vše reprezentováno množinami. Např. číslo 0 jako $\emptyset$ (prázdná množina), číslo 1 jako $\{0\}$, číslo dva jako $\{0, 1\}$.
Obecněji, číslo $n \in \mathbb{N}$ je reprezentováno jako množina všech přirozených čísel, menších než n. V tomto smyslu $2^{\mathbb{N}}$ jsou všechny posloupnosti s hodnotami 0 nebo 1, což přirozeně odpovídá všem podmnožinám $\mathbb{N}$. Symbolicky $2^{\mathbb{N}} \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Definice. Číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazve:

- konstruovatelné, pokud délku x lze sestrojit tzv. Eukleidovskou konstrukcí (pomocí pravítka a kružítka); značíme $x \in \mathcal{K}$
- algebraické, pokud x je kořenem polynomu s celočíselnými koeficienty; značíme $x \in \mathcal{A}$
- transcendentní, pokud není algebraické

Číslo x se nazve vyčíslitelné ("computable"), značíme $x \in \mathcal{C}$, jestliže existuje konečný algoritmus, který x umí spočítat se zadanou přesností.

Poznámky. Platí: $\mathbb{Q} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ a všechny tyto inkluze jsou striktní. Například $\sqrt{2}$ je iracionální, konstruovatelné; $\sqrt[3]{2}$ je algebraické, ale není konstruovatelné. Čísla e, π jsou transcendentní. Nicméně všechna tato čísla jsou vyčíslitelná.

Lemma X.1 Nechť A je konečná nebo spočetná množina. Potom:
(1) Množina všech konečných podmnožin A je spočetná. (2) Množina všech konečných posloupností z A je spočetná.

Důsledky. ① Množiny $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ jsou spočetné.
② Existují nevyčíslitelná čísla.