Obsah:

Odvození:

1) základní reprodukční model
2) replikátorová dynamika

Příklady:

1) HD-hra (též ad Věta 10)
2) nesym. RSP (ad Věta 9)
3) model SLIAR

verze 29/6/2018

1) Základní reprodukční model:

$$\underset{\text{velikost populace}}{N} = N(\overset{\text{čas}}{t})$$

a) diskrétní čas:

$$N(t+1) = N(t) + \underset{\text{míra reprodukce}}{r}\,N(t) = (1+r)N(t)$$

b) spojitý čas: „interpolační úvaha"

$dt > 0$ malé: $\left.\begin{cases} (1-dt) & \dots \text{ podíl neměnící se} \\ dt & \dots \text{ podíl reprodukující se} \end{cases}\right\}$ populace

$$\Rightarrow \quad N(t+dt) = (1-dt)\,N(t) + dt\cdot(1+r)\,N(t)$$

… po úpravě: $\dfrac{N(t+dt)-N(t)}{dt} = r\,N(t)$

$$\boxed{N' = rN}$$

2) Replikátorová dynamika (RD)

$x_i = x_i(t) > 0$ … četnost i-strategie v populaci

$p_i = \dfrac{x_i}{\sum_j x_j}$ … relativní četnost i-strategie

model: $x_i' = r_i x_i$, kde

$$r_i = \underbrace{\alpha - \beta}_{\text{přirozená míra reprodukce}} + \overbrace{c\pi_i(p)}^{\text{vliv herní interakce}}$$

výpočet: $p_i' = \left(\dfrac{x_i}{\sum_j x_j}\right)' = \dfrac{x_i'}{\sum x_j} - \dfrac{x_i \sum_j x_j'}{\left(\sum x_j\right)^2}$

$$= r_i \overbrace{\frac{x_i}{\sum x_j}}^{p_i} - \overbrace{\frac{x_i}{\sum x_j}} \cdot \sum r_j \overbrace{\frac{x_j}{\sum x_\ell}}$$

$$= \underbrace{r_i}_{\alpha - \beta + c\pi_i(p)} p_i - p_i \underbrace{\sum_j r_j p_j}_{\sum_j (\alpha - \beta + c\pi_j(p)) p_j = (\alpha - \beta) + c\pi(p)} = c\left(\pi_i(p) - \pi(p)\right)$$

tj. p_i' nezávisí na α, β

závisí jen na $\pi_i(p) - \pi(p) = \pi(e^i - p, p)$

Př. 1. Jestřábi vs. hrdličky (Hawk-Dove)

bodování: vítězství … 6, porážka … −10, ztráta času … −1 $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c|cc} & h & d \\ \hline h & \frac{6-10}{2} & 6 \\ d & 0 & \frac{6}{2}-1 \end{array}$$

$\underbrace{}_{\text{normalizace}}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(RD) $x_1 = x$ (jestřábi)

$x_2 = 1-x$ (hrdličky)

$$\boxed{\dot{x} = 2x(1-x)(2-3x)}$$

… $\exists!$ stac. bod uvnitř: $x = \frac{2}{3}$ … NE, ESS, globálně asympt. stabilní

Pozn.: (ad Fisherova věta) … musíme uvažovat bez normalizace

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \pi(x) = 2(1+x-3x^2) \ldots \text{max pro } x = \frac{1}{6},$$

leč RD: $x \to \frac{2}{3}$

pomocné výpočty: $X = (x_1, x_2) \in \Delta_2$

$$AX = \begin{pmatrix} -2x_1 + 6x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1(X) \\ \pi_2(X) \end{pmatrix}$$

$$\pi(X) = X \cdot AX = -2x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2$$

$$= -2x^2 + 6x(1-x) + 2(1-x)^2$$

$$= -6x^2 + 2x + 2$$

$x_1 = x$, $x_2 = (1-x)$

vnitřní stac. bod?

$\Updownarrow$ L.5

$$\pi_1(X) = \pi_2(X)$$

$$-2x_1 + 6x_2 = 2x_2$$

$$2x_2 = x_1, \text{ tj. } (x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Př. 2.

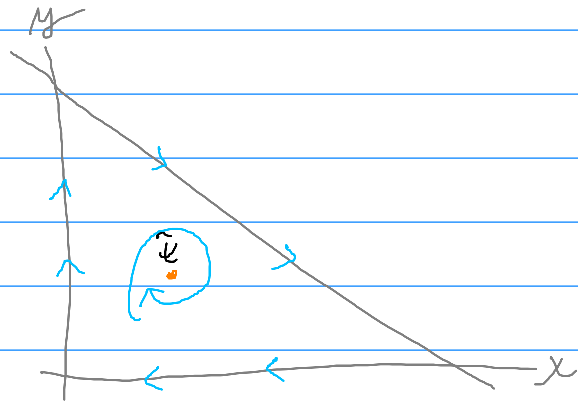
$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}(-1 & -1 & -4)\end{matrix} \\ A = & \begin{pmatrix}1&5&0\\0&1&5\\5&0&4\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{\text{normalizace}} \begin{pmatrix}0&4&-4\\-1&0&1\\4&-1&0\end{pmatrix}$$

nesymetrická varianta RSP (kámen-nůžky-papír)

$\Downarrow$

(RD)
$$x_1' = x_1(4x_2 - 4x_3 - 3x_1x_2)$$
$$x_2' = x_2(-x_1 + x_3 - 3x_1x_2)$$
$$x_3' = x_3(4x_1 - x_2 - 3x_1x_2)$$

$\Downarrow$ redukce: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1 - x - y$



$$x' = x(4x + 8y + 4 - 3xy)$$
$$y' = y(-2x - y + 1 - 3xy)$$

lehce spočteme: $\exists\, \tilde{x}$ stac. bod uvnitř, $\tilde{x} = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{7}{18}\right)$

linearizace $\Rightarrow$ $\sigma(A) = -\frac{1}{9} \pm i\,\frac{5^{3/2}}{9}$

$\Downarrow$

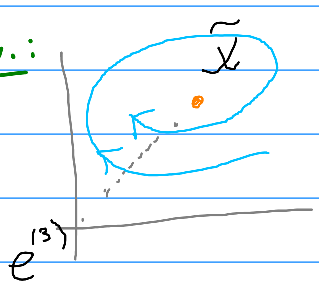
asympt. stab.

avšak: $\tilde{x}$ není ESS ....

připomeň: $\tilde{x}$ vnitřní stac. bod $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ je NE

$\operatorname{supp} \tilde{x} = \{1,2,3\}$ $\Rightarrow$ $\forall y \in \Delta : y \in \beta(\tilde{x})$

Pozn.:



leč: polož: $y = e^{(3)} \neq \tilde{x}$

$y \in \beta(\tilde{x})$ a přitom

$$\pi(e^{(3)}, e^{(3)}) = 0 > -\frac{2}{9}\,\pi(\tilde{x}, e^{(3)})$$

↯ (L.4)

Př. 3 model „SLIAR" .... sezónní chřipková epidemie

$$\begin{aligned}
S' &= -\beta S(I+\delta A) \\
L' &= \beta S(I+\delta A) - \kappa L \\
I' &= p\kappa L - \alpha I \\
A' &= (1-p)\kappa L - \eta A \\
R' &= f\alpha I + \eta A
\end{aligned}$$

„latentní fáze"

„asymptomatická f."

($\delta \in (0,1)$ ... nižší infekčnost

Věta: Nechť $S_0, I_0 > 0$, $I_0 = A_0 = R_0 = 0$.
Pak $\exists!$ řešení, splňující: $S, L, I, A, R > 0$ pro $\forall t > 0$

$$\left.\begin{aligned} &L, I, A \to 0 \\ &S \to S_\infty > 0 \\ &R \to R_\infty < +\infty \end{aligned}\right\} t \to +\infty$$

Dk. lok. $\exists! \Leftarrow$ obecná teorie

glob. $(\forall t \geq 0) \Leftarrow$ omezenost složek: a) zdola ≥ 0 ... viz níže

b) shora: $N' =$

$= (S+L+I+A+R)'$

$= -\underbrace{(1-f)\alpha I}_{\text{úmrtí celkem } [t^{-1}]} \leq 0$

ad a) 1.rce ... $S' = S \cdot a(t)$, kde $a(t) = -\beta(I(t) + \delta A(t))$

$$S(t) = \underbrace{S_0}_{>0} \cdot \underbrace{\exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right)}_{>0} \Rightarrow S(t) > 0 \ \forall t \geq 0$$

klíčový krok: $I + \delta A > 0 \ \forall t > 0$

?? $\exists T > 0$ t.ž. $(I + \delta A)(T) = 0$

BÚNO vezmi nejmenší takové, tj.

$\varphi(t) := (I + \delta A)(t) > 0$ na $[0, T)$

2.rce … $L' + \kappa L = \beta S(t)\varphi(t) \quad / \, e^{\kappa t}$ … integrace

$$L(t)e^{t\kappa} = \underbrace{L_0}_{=0} + \underbrace{\int_0^t \beta S(s)\varphi(s)e^{\kappa s}\,ds}_{>0 \text{ na } (0,T)} \quad \forall t \in [0,T]$$

$L(t) > 0$ na $(0,T]$ $\Leftarrow$

3. & 4. rce $\quad I' + \alpha I = p\kappa L(t)$

$$A' + \eta A = \underbrace{(1-p)\kappa L(t)}_{>0 \text{ na } (0,T)}$$

podobně jako výše

$\Longrightarrow \; I(t), A(t) > 0$ na $[0,T]$

5. rce $\quad R' > 0 \Rightarrow R > 0 \;\; \forall t > 0$

ad $\exists$ limit: 1. rce: $\quad S > 0,\; S' < 0 \Rightarrow \exists \lim_{t\to+\infty} S(t) = S_\infty \geq 0$

integrací: $\quad S(t) + \beta \int_0^t S(s)[I(s) + \delta A(s)]\,ds = S_0$

& $t \to +\infty$

$\Longrightarrow \; S\cdot[I + \delta A] \in L^1(0,\infty)$

2. rce: opět integrace & $t \to +\infty$ $\quad (*)\; L(t) + \kappa\int_0^t L(s)\,ds = \beta\int_0^t S\cdot[I+\delta A]\,ds$

$\Rightarrow \; L \in L^1(0,\infty)$

analogicky 3. & 4. rce $\quad \Rightarrow \; I, A$ — " —

úvaha: $\exists \lim_{t\to\infty} L(t), I(t), A(t) = L_\infty, I_\infty, A_\infty \geq 0$

… z rovnic $(*)$, nutně pak $= 0$

∵ (jinak spor s L^1)