1. Základní růstové modely. Dravec a kořist.

Studujeme modely populační dynamiky pro neznámé velikosti populací $x = x(t)$, $y = y(t)$ proměnné t; tedy vesměs nás bude zajímat jen případ $x > 0$, $y > 0$ a $t \geq 0$. Všechny konstanty (parametry) v modelech jsou také kladné.

Základní růstový model. Je dán rovnicí

$$x' = rx \tag{1.1}$$

kde parametr $r > 0$ je přirozená míra reprodukce (=množství potomstva) na jednotku času a populace. Jeho variantou je model poklesu (vymírání)

$$x' = -hx \tag{1.2}$$

Řešením je exponenciála (rostoucí nebo klesající).

Lemma 1. Nechť funkce $p(t) : [0, +\infty) \to [0, 1]$ je podíl populace v čase t. Potom průměrný čas života jedince je roven $\int_0^\infty p(t)\, dt$.

Důsledek. Průměrná doba života jedince v modelu (1.2) je $1/h$.

Logistický (též Verhulstův) model. Je to rovnice

$$x' = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x \tag{1.3}$$

kde $r > 0$ je opět přirozená míra růsta a $K > 0$ je maximální kapacita prostředí (tj. populace, která se přirozeně uživí). Pro všechna řešení platí $x(t) \to K$ dokonce exponenciálně rychle. Růst mezi 0 a K má typický S-ovitý průběh, pozorovatelný na spoustě dat.

Lotka-Volterrův model. Jedná se o nejjednodušší model typu dravec-kořist. Je dán soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x' &= (r - ky)x \\ y' &= (-h + px)y \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde x resp. y je populace kořisti resp. dravce. Lze dále spočítat:

- systém má jediný stacionární bod $S = (h/p, r/k)$
- funkce $V = r \ln y - ky + h \ln x - px$ je prvním integrálem soustavy; protože V je ryze konkávní, dostáváme periodičnost *všech* řešení
- stacionární bod je zároveň těžištěm (střední hodnotou) těchto periodických řešení

Nevýhody modelu (1.4) jsou následující:

- linearita zpětné vazby (členy ky resp. px) není realistická při velkých populacích
- řešení jsou pouze neutrálně stabilní (tj. stabilní, ne však asymptoticky stabilní); model není strukturálně stabilní

Volterrův princip. V systémech typu dravec-kořist má celkové zhoršení životního prostředí za následek relativní pokles počtu dravců a relativní nárůst počtu kořisti.

Holling-Tannerův model. Jedná se o pokročilejší model typu dravec-kořist. Je dán rovnicemi

$$x' = \left(r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{my}{A+x}\right) \cdot x \tag{1.5}$$

$$y' = s\left(1 - \frac{Py}{x}\right) y \tag{1.6}$$

Význam jednotlivých členů: v rovnici (1.5) máme za prvé logistický model pro růst kořisti x. Druhý člen pišme jako $-Hx$, střední doba odlovu je tedy

$$\frac{1}{H} = \frac{A+x}{my}$$

Druhá rovnice (1.6) je logistický model pro kořist y s kapacitou x/P; tedy P chápeme jako množství kořisti nutné k obživě jednoho dravce.

Věta 1. Pro každou počátení podmínku $x(0) > 0$, $y(0) > 0$ existuje právě jedno řešení, definované pro všechna $t \geq 0$. Toto řešení je omezené a má kladné složky.

Pro tento model lze spočítat:

- existuje jediný stacionární bod S, daný rovnicemi

  $$y = \frac{r}{m}(A+x)(1 - x/K)$$
  $$y = x/P$$

  Reálné části vlastních čísel linearizované soustavy v S jsou v závislosti na parametrech rovnice buď záporné (stabilita) nebo kladné (negativní stabilita)

- V případně negativní stability bodu S plyne z Poincarého-Bendixsonovy teorie existence netriviálního periodického řešení.

- numerické experimenty naznačují, že systém se chová dvě možnými způsoby: (1) v případě, že S je stabilní, konvergují k němu všechna řešení a nebo (2) pokud S je nestabilní, konvergují všechna řešení ke výše zmíněnému periodickému řešení

Model konkurence/koexistence. Jde o dvě populace, řídící se částečně spřaženým logistickým modelem:

$$x' = r\left(1 - \frac{x+ay}{K}\right) x \tag{1.7}$$

$$y' = s\left(1 - \frac{y+bx}{L}\right) y \tag{1.8}$$

Význam konstant: r a K resp. s a L je přirozená míra růstu a kapacita prostředí druhu x resp. y. Parametr $a \in [0,1]$ resp. $b \in [0,1]$ je míra konkurence y vůči x resp. x vůči y.
Pro tento model lze ukázat, že v závislost na relativních hodnotách parametrů existují tři možné scénáře:

- neexistuje stacionární bod – jeden druh hyne, druhý se blíží kapacitní hodnotě, nezávisle na počáteční podmínce
- existuje stabilní stacionární bod, přitahující všechna řešení (nezávisle na počáteční podmínce)
- existuje nestabilní stacionární bod – přežívá ten druh, jehož bylo na počátku relativně větší množství, druhý hyne

Gauseho model dravec-kořist se skrýší. Tento model je dán rovnicemi:

$$x' = rx - y\varphi(x) \tag{1.9}$$
$$y' = \big(e\varphi(x) - h\big)y \tag{1.10}$$

kde funkce $\varphi(x)$ vyjadřující míru požírání kořisti je

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x < x_s \\ \frac{mx}{a+x} & x > x_s \end{cases} \tag{1.11}$$

Smyslu modelu je následující: pokud $x < x_s$, kde x_s je ,,kapacita skrýše", nedochází vůbec k odlovu kořisti. Naopak $x > x_s$ je kořist nucena opustit skrýš a nastává odlov jako u Holling-Tannerova modelu. Ve druhé rovnici růst v důsledku lovu kombinovaný s exponenciálním vymíráním.

Poznámka. Problém: jak sestrojit řešení (a vůbec jak interpretovat rovnici) pro hodnoty $x = x_s$?

- Filippovův přístup: systém $x' = F(x)$, kde F má nespojitost na nadploše Γ, s jednostrannými limitami F_+ a F_-. Pozoruji: potíže s pokračováním řešení nastávají pouze tehdy, když F_+ i F_+ míří do Γ.

  V takovém případě na Γ kladu $x' = \tilde{F}(x)$, kde $\tilde{F} = \alpha F_- + (1-\alpha)F_+$, přičemž $\alpha \in (0,1)$ je voleno tak, že $\tilde{F}$ má směr tečný ke Γ.

- moderní přístup: místo funkce uvažuji množinová zobrazení, místo diferenciálních rovnic pak diferenciální inkluze.

Poznámka. Klasická teorie ODR říká, že pro existenci (popř. jednoznačnost) řešení rovnice $X' = F(X)$ je potřeba spojitost (popř. vyšší hladkost) fce $F(\cdot)$. Fakticky jsou však možné i nespojitosti ,,na správnou stranu" (což ,,rozumné modely" nepřekvapivě splňují).

Příklad z mechaniky. Coulombovo (suché) tření: třecí síla nezávisí na rychlosti; je-li síla menší než kritická mez, pohyb nenastává. Newtonovy pohybové zákony pak dávají

$$mx'' + F = h(t) \tag{1.12}$$

kde $m > 0$ je hmotnost, $h(t)$ je vnější (daná) síla, F je třecí síla a x resp. x' je poloha resp. rychlost, přičemž platí

$$(x', F) \in \mathcal{C} \tag{1.13}$$

kde $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ je definováno jako

$$\mathcal{C} = \{(x, -F_c),\ x \le 0\} \cup \{(0, y),\ y \in [-F_c, F_c]\} \cup \{(x, F_c),\ x \ge 0\}$$

přičemž $F_c > 0$ je kritická klidová síla (a zároveň konstantní síla tření při pohybu).

Definice. Řešením úlohy (1.12–1.13) na $I = [0, T]$ jsou funkce $x = x(t)$ a $F = F(t)$ takové, že

- $x(t)$, $x'(t)$ jsou AC
- $F(t)$ je měřitelná
- rovnice (1.12–1.13) platí pro s.v. $t \in I$

Poznámka. Množina $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ se nazývá monotónní graf, jestliže pro každé (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathcal{A}$ platí $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0$.

Věta 2. Pro každé $T > 0$, $h(t) \in L^2(0, T)$ a x_0, $v_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení (1.12–1.13), splňující počáteční podmínky $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$.

Poznámka. Snadnou modifikací důkazu máme týž výsledek pro obecnější model $mx'' + F - \gamma(x') + \sigma(x) = h(t)$, kde $\gamma(x')$ je relaxační funkce a $\sigma(x)$ je síla pružiny.

Definice. Řešení Gauseho modelu (1.9–1.11) nazveme funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $\varphi = \varphi(t)$, splňující

- $x(t)$, $y(t)$ jsou AC
- $\varphi(t)$ je měřitelná
- pro s.v. t platí

$$\begin{aligned} x' &= rx - y\varphi \\ y' &= \big(e\varphi - h\big)y \\ (x, \varphi) &\in \mathcal{G} \end{aligned}$$

kde $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$ je definováno jako

$$\mathcal{G} = \{(x, 0),\ x \in [0, x_s]\} \cup \{(x_s, y),\ y \in [0, \tfrac{mx_s}{a+x_s}]\}\{(x, \tfrac{mx}{a+x}),\ x \geq x_s\}$$

Pozorování. Řešení sestrojené Filippovovou metodou je zároveň řešení ve smyslu předchozí definice, čímž je de facto dokázána existenční část následující věty.

Věta 3. Pro každé x_0 a $y_0 > 0$ existuje právě jedno řešení Gauseho modelu, splňující $x(0) = x_0$ a $y(0) = y_0$.

2. Epidemiologické modely

Tyto modely popisují šíření infekčních nemocí v populacích. Existuje velké množství variant.

Základní SIR model. Jedná se o systém rovnic

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI \\ I' &= \beta SI - \alpha I \\ R' &= \alpha I \end{aligned} \tag{2.1}$$

Význam proměnných: Susceptible („náchylní“, tj. zdraví s možností se nakazit), Infectious, Removed („vyloučení“, tj. uzdravení s trvalou imunitou). Celková populace $N = S + I + R$ (zde konstantní). Význam parametrů: $1/\alpha$ je doba nemoci. Člen βSI je počet nově nakažených za jednotku času.

Pro tento model lze lehce spočítat:

- S klesá ke kladné limitě S_∞, I roste dokud $S > \alpha/\beta$, poté I klesá limitně k nule
- platí vztah
$$\ln \frac{S_0}{S_\infty} = \mathcal{R}_0 \left(1 - \frac{S_\infty}{S_0}\right)$$
kde $\mathcal{R}_0 = S_0 \frac{\beta}{\alpha}$ je „reprodukční číslo" (tj. počet nově nakažených na jednoho nemocného). Protože $1/\alpha$ je známo a podíl S_0/S_∞ můžeme zjistit empiricky, lze dopočítat konstantu β
- soustava má první integrál $S + I - \frac{\alpha}{\beta} \ln S$

Model SLIAR. Jde o pokročilejší variantu SIR modelu. Lze jím relativně dobře kvantitativně zachytit sezónní epidemii např. chřipky ve velké populaci. Viz domácí úkol č. 2.

Model SIR s populační dynamikou. Jedná se o systém rovnic

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \beta S I - \mu S \\ I' &= \beta S I - \mu I - \alpha I \\ R' &= f \alpha I - \mu R \end{aligned} \tag{2.2}$$

Proti modelu (2.1) máme členy: $\Lambda > 0$ - počet nově narozených za jednotku času. Faktor μ je (přirozená) úmrtnost, tj. $1/\mu$ střední délka života (typicky $1\mu >> 1/\alpha$). Z nemocných část f se uzdraví (s trvalou imunitou), část $(1 - f)$ v důsledku nemoci umírá.
Celková populace $N = S + I + R$ se řídí rovnicí

$$N' = \Lambda - (1 - f)\alpha I - \mu N$$

Zřejmě v nepřítomnosti nákazy směřuje systém k přirozené kapacitě prostředí $K = \Lambda/\mu$. Základní reprodukční číslo modelu je $\mathcal{R}_0 = \beta K/(\alpha + \mu)$. Pro tento model lze dokázat:

- stačí uvažovat nadále jen rovnice pro S, I; hodnoty R a N pomocí nich vždy dopočteme
- dynamika neopustí trojúhelník Ω, daný vztahy $S > 0$, $I > 0$ a $S + I < K$.
- platí dichotomie (typická pro tyto a podobné modely): jestliže $\mathcal{R}_0 < 1$, pak $I(t) \to 0$ a $S(t) \to K$, tj. nákaza se v populaci neudrží. Jestliže naopak $\mathcal{R}_0 > 1$, existuje právě jeden stacionární bod $E_* = (S_*, I_*) \in \Omega$, tzv. *endemické equilibrium.* Tento bod je asymptoticky stabilní; dokonce přitahuje všechna řešení v Ω.
- uvažujme model s reálnými daty $\mu = 1/75$, $\alpha = 25$, $f = 1$ a $\Lambda = 1000/75 \approx 13.3$, tj. $K = 1000$. To odpovídá středně velké komunitě s průměrnou dobou života 75 let a nemoc typu spalniček, jež trvá dva týdny a neumírá se na ni. Odsud $\mathcal{R}_0 = 4$, tedy dynamika se vždy blíží k endemickému equilibriu E_*.

  Volme počáteční data $S_0 = 999$ a $I_0 = 1$. Numerický experiment ukazuje tři různé fáze: (i) počáteční epidemie (ii) pomalé přiblížení k E_* a konečně (iii) pomalá oscilace kolem E_* s periodou v řádu let.

Další možná zobecnění modelu SIR. Studuje se nepřeberné množství dalších variant těchto modelů, které vznikají mimo jiné:

- přidáním dalších tříd (fází nemoci): SLIAR, SEIR, ...

- zahrnutím efektu zpoždění, tj. např. místo $\beta S(t)I(t)$ se uvažuje člen

$$\beta S(t) \int_0^{+\infty} f(\tau) I(t-\tau)\, d\tau$$

  kde $f(\tau)$ je vhodná nezáporná funkce, což vede na diferenciální rovnice se zpožděním
- zahrnutím efektu náhody, což vede na stochastické diferenciální rovnice
- jemnějším popisem populace: věk, prostorová proměnná, ...

My se budeme věnovat poslední situaci: místo $S = S(t)$ budeme pracovat s neznámou $s = s(t,x)$, což je hustota populace v čase t a bodě x. Zaměříme se však pouze na hledání speciálních řešení ve tvaru „cestující vlny". Na celý problém se podíváme trochu obecněji, a proto je mu věnována zvláštní kapitola.

3. Cestující vlny v rovnicích reakce-difuze

Naším cílem je přejít od ODR typu

$$N' = f(N), \qquad N = N(t) \tag{3.1}$$

parciální diferenciální rovnici tvaru

$$\partial_t n = k\partial_{xx} n + f(n), \qquad n = n(t,x) \tag{3.2}$$

kde člen $k\partial_{xx} n$ modeluje efekt difuze. Omezíme se však na hledání speciálních řešení ve tvaru cestující vlny ("travelling wave")

$$n(t,x) = U(x - ct) \tag{3.3}$$

kde $U = U(\tau)$ je nová neznámá funkce, vyjadřující profil vlny, a parametr c je rychlost šíření vlny. Po dosazení dostáváme

$$-cU' = kU'' + f(U) \tag{3.4}$$

a naším cílem bude nalézt „rozumná" (tedy mající konečné limity v nekonečnu) řešení této nelineární ODR 2. řádu.

Příklady. ① Rovnice vedení tepla $\partial_t u = k\partial_{xx} u$ má pouze triviální (konstantní), nebo (fyzikálně nezajímavé) exponenciální profily cestujících vln.
② Naproti tomu vlnová rovnice $\partial_{tt} u = k\partial_{xx} u$ připouští libovolné vlnové profily, mají-li jen správnou rychlost šíření $c = \pm\sqrt{k}$.

Rovnici (3.4) přepíšeme jako systém

$$\begin{aligned} U' &= V \\ kV' &= -cV - f(U) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Omezená řešení, která hledáme, vznikají jako orbity limitně spojující dva stacionární body. Užitečná přitom bude následující verze věty „o (ne)stabilní varietě ".

Věta 4. Je dána rovnice $X' = F(X)$, kde $X \in \mathbb{R}^n$. Nechť X_0 je stacionární bod a $F \in C^1(\mathcal{U}(X_0))$. Označme $A = \nabla_X F(X_0)$. Nechť $\lambda \in \sigma(A)$ je záporné, jednoduché vlastní číslo. Potom v $\mathcal{U}(X_0)$ existují řešení, splňující

$$X(t) \sim X_0 + e^{\lambda t} v, \qquad t \to +\infty \tag{3.6}$$

kde v je vlastní vektor příslušný k λ. Zrcadlová verze: $\lambda > 0$, (3.6) dostaneme pro $t \to -\infty$.

Lemma 2. Nechť I, I_+, $I_- \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené neprázdné intervaly, nechť $I_+ \cup I_- \subset I$, $I_+ \cap I_- = \emptyset$. Potom $I \setminus (I_+ \cup I_-) \neq \emptyset$.

Fisherova rovnice (též Kolmogorov-Petrovský-Piskunovova rovnice). Jde o nám známý logistický model, obohacený o efekt difuze:

$$\partial_t u = k\partial_{xx} u + ru(1 - u/K) \tag{3.7}$$

Hledáme-li řešení ve tvaru $u(t,x) = U(x - ct)$, dostaneme

$$-cU' = kU'' + rU(1 - U/K) \tag{3.8}$$

Klaďme dále pro jednoduchost $k = r = K = 1$, tedy jediným parametrem problému je $c > 0$ rychlost šíření vlny. Substituce $V = U'$ vede obvyklým způsobem na systém

$$\begin{aligned} U' &= V \\ V' &= U(U-1) - cV \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pro tento systém lze ukázat:

- existují právě dva stacionární body stabilní $(0,0)$ a sedlový $(1,0)$
- cestující vlna vznikne jako orbit řešení, které vybíhá z $(1,0)$ a míří do $(0,0)$ – existuje právě jedno takové řešení (kombinace elementárních úvah a věty o nestabilní varietě)
- podmínka $c > 2$ zaručuje, že linearizace v $(0,0)$ nemá komplexní vlastní čísla: to by způsobilo nežádoucí oscilace - záporné hodnoty vlny.

Poznámka. Kde se bere člen $\partial_{xx} n$? Dvě možnosti:

- Napíšeme bilanci pro libovolný interval $I = [\alpha, \beta]$, tok hraničními body je roven $-k\partial_x n$ (Fickův zákon):
$$\frac{d}{dt}\int_I n(t,x)\,dx = \int_I f(n(t,x))\,dx + k\big[n(t,\beta) - n(t,\alpha)\big]$$
odtud lokalizací (3.2)
- V modelu SIR chceme zahrnout přenos infekce na dálku, tj. nahradit člen $S(t)I(t)$ obecnějším členem tvaru
$$\int_{\mathbb{R}} F(x,x')s(t,x)i(t,x')\,dx'$$
Rozumné předpoklady: $F(x,x') = F(|x - x'|)$, sudá funkce, zanedbatelná pro $|x - x'| > \delta$. Odtud substituce $y = x' - x$, lokalizace do $|y| \le \delta$ konečně Taylorův rozvoj pro $i(t, x+y) = i(t,x) + \partial_x i(t,x)y + \partial_{xx} i(t,x)y^2/2$ vede na
$$s(t,x)\int_{-\delta}^{\delta} F(|y|)i(t,x+y)\,dy \approx s(t,x)\big[\theta + \phi\partial_{xx} i(t,x)\big]$$
kde $\theta = \int_{-\delta}^{\delta} F(|y|)\,dy$, $\phi = \int_{-\delta}^{\delta} F(|y|)y^2/2\,dy$. Tak dostáváme následující model šíření infekce v prostoru:

SIR model s prostorovou proměnnou. Z výše uvedených úvah vyplynul model

$$\begin{aligned}\partial_t s &= -s\big(\theta i + \phi \partial_{xx} i\big)\\ \partial_t i &= -\partial_t s - g i\end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $s = s(t,x)$, $i = i(t,x)$ jsou neznámé hustoty náchylných resp. infekčních jedinců v prostoru a čase, a θ, ϕ, $g > 0$ jsou konstanty modelu.
Budeme opět zkoumat existenci cestující vlny (tedy vlastně epidemie) v prostoru, tj. řešení tvaru

$$s(t,x) = S(x - ct), \qquad i(t,x) = I(x - ct)$$

kde $S = S(\tau)$ a $I = I(\tau)$ splňují okrajové podmínky $S(\tau) \to S_0$, resp. S_1 pro $\tau \to \pm\infty$ a $I(\tau)$, $I'(\tau) \to 0$ pro $\tau \to \pm\infty$. Zde $S_0 > S_1 > 0$ je počáteční resp. koncový stav s.
Ukazuje se, že za vhodných podmínek (základní reprodukční číslo $S_0\theta/g > 1$ a rychlost šíření c je dost velká) existuje právě jedna taková vlna, která odpovídá heteroklinickému orbitu v rovině $S - I$, jdoucímu z $(S_1, 0)$ do $(S_0, 0)$.

4. Teorie her a replikátorová dynamika

Definice. *Hrou* (přesněji hrou dvou hráčů v normálním tvaru) rozumíme dvojici konečných množin S_1 a S_2 (*strategie* prvního resp. druhého hráče) *výplatních funkcí* $\pi_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ a $\pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ (zisky prvního resp. druhého hráče při dané volbě strategií).
Pišme pro jednoduchost $S_1 = \{1, \dots, m\}$ a $S_2 = \{1, \dots, n\}$ a definujme matice A a B (typu $m \times n$) jako

$$a_{kl} = \pi_1(k,l), \qquad b_{kl} = \pi_2(k,l) \qquad k = 1, \dots, m,\ l = 1, \dots, n$$

Hru tedy ztotožňujeme s dvojicí matic (A, B). Hry dvou hráčů nazýváme proto také (dvou)maticové hry a prvního resp. druhého hráče nazýváme řádkový resp. sloupcový hráč.
Speciální případy: $A^T = B$ je *symetrická* hra; je-li $A = A^T = B$, pak jde o *dvojitě symetrickou* hru. Pokud $A = -B$, tj. vlastně $\pi_2 = -\pi_1$, hovoříme o hře *s nulovým součtem.*

Definice. Prostorem *smíšených strategií* prvního resp. druhého hráče rozumíme

$$\Delta_1 = \Big\{p \in \mathbb{R}^m;\ p_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^m p_i = 1\Big\}$$
$$\Delta_2 = \Big\{q \in \mathbb{R}^n;\ q_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^n q_i = 1\Big\}$$

Původní strategie z S_1 resp. S_2 nazýváme *čisté strategie* a ztotožňujeme je přirozeně s bázovými vektory $e^{(k)} \in \Delta_1$ resp. Δ_2.
Smíšené strategie můžu chápat pravděpodobnostně (náhodná volba čistých strategií) nebo populačně (náhodná volba soupeře z velké populace čistých stratégů). Zobecněné výplatní funkce $\pi_{1,2} : \Delta_1 \times \Delta_2 \to \mathbb{R}$ jsou v každém případě zjevně rovny

$$\pi_1(p,q) = \sum_{k,l} p_k q_l a_{kl} = p \cdot Aq$$
$$\pi_2(p,q) = \sum_{k,l} p_k q_l b_{kl} = p \cdot Bq$$

Definice. Strategii $p^* \in \Delta_1$ nazveme *nejlepší odpovědí* na strategii $q \in \Delta_2$, jestliže

$$\pi_1(p^*, q) = \max_{p \in \Delta_1} \pi_1(p, q)$$

Značíme $p^* \in \beta_1(q)$. Analogicky definujeme nejlepší odpověď $q^* \in \Delta_2$ na $p \in \Delta_1$, tj. $q^* \in \beta_2(p)$. Definujme dále *nosič* strategie

$$C(p) = \{k;\ p_k > 0\}, \qquad C(q) = \{l;\ q_l > 0\},$$

- jsou to právě ty čisté strategie, jež jsou v p zastoupeny s nenulovou pravděpodobností.

Lemma 3. Platí $p \in \beta_1(q)$ právě když $e^k \in \beta_1(q)$ pro každé $k \in C(p)$. Speciálně existuje nejlepší odpověď v čistých strategiích.

Definice. Dvojice strategií $(p^*, q^*) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ se nazve *Nashovo equilibrium* hry, jestliže $p^* \in \beta_1(q^*)$ a zároveň $q^* \in \beta_2(p^*)$.

Věta 5. Každá hra má alespoň jedno Nashovo ekvilibrium.

Poznámky. Zabývejme se nyní chvíli hrami s nulovým součtem: ty lze ztotožnit s maticí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, přesněji jde o dvoumaticovou hru $(A, -A)$. Jde o to, že veličinu $p \cdot Aq$ se první hráč strategií p snaží maximalizovat, zatímco druhý hráč strategií q minimalizovat.

Definice. Pro hru s nulovým součtem matice A definujeme:

$$v_1(p, A) = \min_q p \cdot Aq \qquad v_1(A) = \sup v_1(p)$$

hodnotu strategie p a hodnotu hry prvního hráče. Názorně: minimální zaručený zisk při strategii p a největší vynutitelný zisk celé hry.
Analogicky definujeme $v_2(q, A) = \max_p p \cdot Aq$ a $v_2(A) = \inf v_2(q)$ hodnotu strategie q a hodnotu hry druhého hráče, tedy maximální možnou ztrátu při strategii q a minimální ztrátu přes všechny strategie.
Dále řekneme, že p^* je optimální strategie prvního hráče, jestliže $v_1(p^*) = v_1(A)$. Podobně q^* je optimální strategie druhého hráče, jestliže $v_2(q^*) = v_2(A)$. Tedy jde o strategii, která hráči zaručí hodnotu hry – její existence není a priori jasná.
Je intuitivně jasné (a triviální dokázat), že $v_1(A) \leq v_2(A)$. Důkaz rovnosti obou veličin je prvním historicky důležitým výsledkem teorie her: tzv. minimaxová věta (J. von Neumann, 1928).

Věta 6. Nechť A je hra s nulovým součtem. Potom:

1. $v_1(A) = v_2(A)$
2. dvojice strategií (p^*, q^*) tvoří N.e. hry $(A, -A)$, právě když p^* je optimální pro prvního hráče a zároveň q^* je optimální pro druhého hráče.

Poznámky. Dosud jsme hovořili o hrách v *normálním tvaru*. Hry v *extenzivním tvaru*: stromová struktura, hráči se střídají v tazích, jsou možné náhodné tahy, neúplná informace o stavu hry (šachy, piškvorky, karetní hry, ...).
Hru v extenzivním tvaru lze formálně zapsat jako hru v normálním tvaru: strategií je zde pravidlo, určující chování hráče v libovolném uzlu (bez ohledu na to, zda jím hra projde či ne). Zpětnou indukcí lze dokázat, že každá hrá v extenzivním tvaru (s úplnou informací) má N.e. dokonce v čistých strategiích.

Speciálně odsud plyne Zermelova šachová věta (Zermelo 1914), podle níž buď bílý má vítěznou strategii, nebo černý má vítěznou strategii, nebo každý z hráčů může vynutit remízu.

Poznámky. Přejdeme nyní k populačně-dynamickým otázkám. Nadále budeme uvažovat pouze symetrickou hru, určenou výplatní funkcí $\pi(x, y) = x \cdot Ay$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vektor $x \in \Delta$, kde Δ je $n-1$-dimezionální simplex, bude reprezentovat populaci, v níž je x_i podíl zastoupení i-té strategie. Předchozí definice („nosič“, „nejlepší odpověď“) zůstavají v platnosti:

$$C(x) = \{i;\ x_i > 0\}$$
$$\beta(x) = \{y \in \Delta;\ \pi(y, x) = \sup_y \pi(y, x)\}$$

Speciálním případem předchozí definice pak je:

Definice. Řekneme, že populace $x \in \Delta$ tvoří Nashovo ekvilibrium (NE), jestliže $x \in \beta(x)$, tj. $\pi(x, x) = \sup_{y\in\Delta} \pi(y, x)$.

Poznámky. Zřejmě x je NE právě když $\pi(e^{(i)}, x) \le \pi(x, x)$ pro každé i. Navíc (dle Lemmatu 3) $\pi(e^{(i)}, x) = \pi(x, x)$ pro každé $i \in C(x)$.
Modifikací Věty 5 dostaneme lehce, že vždy existuje stav populace, který tvoří N.e. Potíž však je v tom, že N.e. je obvykle příliš mnoho. Existuje mnoho různých zpřísnění pojmu N.e.. Jedním z nejdůležitějších pro populační dynamiku je následující.

Definice. Řekneme, že $x \in \Delta$ je *evolučně stabilní strategie* (ESS), jestliže platí:

$$\big(\forall y \in \Delta, y \ne x\big)\big(\exists \bar\varepsilon_y > 0\big)\big(\forall \varepsilon \in (0, \bar\varepsilon_y)\big) :\ \pi(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) > \pi(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y)$$

Číslo $\bar\varepsilon_y$ se nazývá invarzní bariéra a lze ukázat, že je můžeme volit nezávisle na $y \ne x$.

Lemma 4. Populace x je ESS právě když x je NE a navíc pro každé $y \in \beta(x)$, $y \ne x$ je $\pi(y, y) < \pi(x, y)$.

Poznámky. Nyní budeme uvažovat, že $x = x(t)$ a chceme napsat rovnice pro příslušnou populační dynamiku. Je rozumné uvažovat tvar

$$x_i' = x_i g_i(x) \tag{4.1}$$

kde funkce $g_i : \Delta \to \mathbb{R}$ splňují

- $\sum_i x_i g_i(x) = 0$ pro $\forall x \in \Delta$
- $\operatorname{sgn} g_i(x) = \operatorname{sgn}\big(\pi_i(x) - \pi(x)\big)$

tzv. požadavek regularity resp. výplatní monotonie. Zde a nadále pro jednoduchost píšeme průměrný zisk i-tého hráče resp. průměrný zisk celé populace jako

$$\pi_i(x) = \pi(e^{(i)}, x)$$
$$\pi(x) = \pi(x, x)$$

Nejjednoduší volbou je právě $g_i(x) = \pi_i(x) - \pi(x)$, která vede na tzv. replikátorovou rovnici

$$x_i' = x_i\big(\pi_i(x) - \pi(x)\big) \tag{RD}$$

Tou se budeme nadále zabývat, ale je vhodné poznamenat, že mnohé následující výsledky platí obecněji pro každou rovnici (4.1), splňující výše uvedené předpoklady.

Věta 7. Pro každou počáteční podmínku z Δ existuje právě jedno řešení $x(t)$ replikátorové rovnice, definované a splňující $x(t) \in \Delta$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$.
Dále: nosič populace $C(x(t))$ a tedy speciálně hranice, hrany, vrcholy a vnitřek Δ jsou invariantní vůči replikátorové dynamice.

Věta 8. Pro replikátorovou dynamiku platí:

1. $\tilde{x}$ je NE $\implies$ $\tilde{x}$ je stacionární bod
2. $\tilde{x}$ je stabilní stacionární bod $\implies$ $\tilde{x}$ je NE

Věta 9. Pokud $\tilde{x}$ je ESS, pak $\tilde{x}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod pro replikátorovou dynamiku.

Poznámka. Důkaz předchozí věty se opírá o Ljapunovskou funkci (Kullback-Leibler)

$$H(x) = \sum_{i \in C(\tilde{x})} \tilde{x}_i \log\left(\frac{\tilde{x}_i}{x_i}\right), \qquad x \in Q_{\tilde{x}}$$

kde $Q_{\tilde{x}} = \{x \in \Delta; C(x) \supset C(\tilde{x})\}$ je, jak snadno nahlédnu, okolí $\tilde{x}$ vůči Δ.

Příklad. Hra určená maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

má ve vnitřku Δ jediné NE $\tilde{x} = (1/6, 4/9, 7/18)$, které je asymptoticky stabilní (věta o linearizované stabilitě), leč není ESS (neboť $\pi_3(\tilde{x}) > \pi(\tilde{x})$).

Pozorování. Přičtením konstanty k libovolnému sloupci matice se nemění hodnota veličiny $\pi(x - y, z)$, kde x, y, $z \in \Delta$. Nemění se tedy NE, ESS, $\beta(x)$, rovnice (RD). Toho často využíváme k tzv. *normalizaci hry*, kdy přičtením/odečtením vhodných konstant ke sloupcům vynulujeme diagonálu. Předchozí příklad po normalizaci dává matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a tedy vidíme, že jde o jakousi nesymetrickou verzi hry „kámen-nůžky-papír“. – Pozor však s ohledem na následující větu, že normalizace mění hodnotu $\pi(x)$.

Věta 10. [Základní věta přírodního výběru.] Nechť matice A je symetrická. Potom pro (RD) platí $\frac{d}{dt}\pi(x(t)) \geq 0$, přičemž rovnost nastává právě ve stacionárních bodech.

Lemma 5. Pro rovnice (RD) platí:

1. $\tilde{x} \in \operatorname{int} \Delta$ je stacionární bod, právě když $\pi_i(\tilde{x})$ nezávisí na i.
2. pokud $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \operatorname{int} \Delta$ jsou stacionární, pak je stacionární také konvexní kombinace $t\tilde{x} + (1-t)\tilde{y}$, $t \in (0, 1)$.
3. pokud $\operatorname{int} \Delta$ obsahuje periodický orbit, obsahuje též stacionární bod

Věta 11. Označme $u = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Pokud složky $(\operatorname{adj} A)u$ nejsou téhož znamení, pak rovnice (RD) nemá ve vnitřku Δ stacionární body ani periodické orbity.

Poznámka. Připomeňme, že $\operatorname{adj} A$ je matice se složkami $(-1)^{i+j} M_{ji}$, kde M_{ij} je subdeterminant vzniklý vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Platí $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$.
Pro účely předchozí věty rozlišujeme tři různá znamení: 0, +1, -1.

. . . .

Příklady. ① Jestřábi vs. hrdličky („Hawk-Dove“) neboli agresivní vs. mírumilovná strategie: existuje jediné NE, které je zároveň ESS.
② Kámen-nůžky-papír: NE stabilní, ne asymptoticky. Nerobustní dynamika.