téma: linearizace a stabilita

motivační úvaha: (1) $x' = f(x)$ $x_0 \cdots$ stac. bod
$f \in C^1(\mathcal{U}(x_0))$

řešení blízko x_0: $x(t) = x_0 + \underbrace{y(t)}_{\text{malá porucha}}$

$\Rightarrow$ $x' = (x_0+y)' = y' = f(x_0+y)$ / Taylor

$$= \underbrace{f(x_0)}_{=0} + \nabla f(x_0)y + \underbrace{\cancel{R(y)}}_{\text{řádu 2 a výše...}}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{(2) \quad y' = Ay}$, kde $A = \nabla f(x_0)$ (matice linearizace)

linearizovaná úloha

Princip linearizace: řešení (1) v okolí x_0 se nějak podobají řešením (2) v okolí 0

jak přesně: různé věty (i protipříklady)

Věta [Hartman-Grobman]

Nechť: x_0 stac. bod (1), $f \in C^1$ na okolí x_0

$\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $A = \nabla f(x_0)$

Pak: $\exists\, \mathcal{U}$ okolí t_0 v $\mathbb{R}^n$, $\exists\, \mathcal{V}$ okolí 0 v $\mathbb{R}^n$

$\exists\, \varphi: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ homeomorfismus*),

převádějící**) řešení (1) na řešení (2)

*) φ spojité, 1-1, φ_{-1} spojité

**) $x(t)$ řešení (1) v $\mathcal{U}$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(x(t))$ řešení (2) v $\mathcal{V}$