Pozn. minule: hra 2 hráčů ... $(p,q) \in \Delta_1 \times \Delta_2$

(N-hráčů) $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

nadále pouze: symetrická hra (2 hráčů)

$S = \{1, \dots, m\}$ ... čisté strat.

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ... (obecně nesym. mat.)

$$\pi(x,y) = x \cdot Ay = \sum_{i,j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$$

(obecně $\pi(x,y) \neq \pi(y,x)$)

$$\boxed{x \in \Delta}$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^m;\ x_i \in [0,1],\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

velká populace (čisté strat.)

cíl: replikátorová dynamika

(model Darwinovské evoluce)

souboj strategií

Def. $C(x)=\{i \,;\, x_i>0\}$ ... nosič

$$\beta(x)=\{y\in\Delta \,;\, \pi(y,x)=\sup_{\tilde{y}\in\Delta}\pi(\tilde{y},x)\}$$

... nejlepší odpověď

Def. x je N.e. $\iff$ $x\in\beta(x)$

Věta $\exists$ N.e. (populace).

dk. 1) Věta 5 $(p=q=x)$

2) **Kakutaniho věta:**

Nechť X ... lok. konv. t.p

$K\subset X$ ... $\neq\emptyset$, konv., kompakt

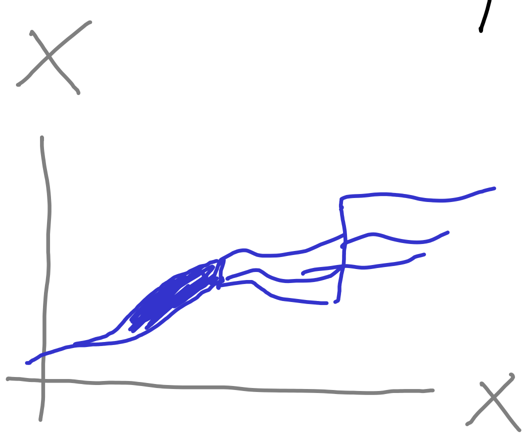
$F: K\to 2^K$ ... multifunkce

$(x\longmapsto F(x)\subseteq K)$

t.ž.: $\forall x$: $F(x)\neq\emptyset$, konv., komp.

F má uzavřený graf *)

(tj. $y_n\in F(x_n)$, $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$ $\Rightarrow$ $y_0\in F(x_0)$)



Pak: $\exists x\in K$ t.ž. $x\in F(x)$.

aplikace: $X=\mathbb{R}^n$, $K=\Delta$, $F=\beta$

množina nejl. odp.

ad $*$) ? $\quad y_n \in \beta(x_n)$, $\quad x_n \to x_0$

$y_n \to y_0 \Rightarrow y_0 \in \beta(x_0)$

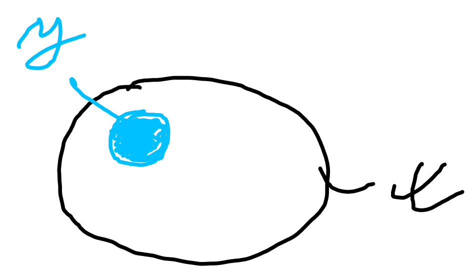
není těžké

Def. $x \in \Delta$ nazvu ESS (evolučně stabilní strategie/populace)

pokud: $\forall y \in \Delta\ y \neq x\ \exists\, \varepsilon_y > 0\ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$:

(+) $\pi(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) > \pi(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y)$.

$*$) invazní bariéra



Lemma 4. x je ESS $\Longleftrightarrow$ x je N.e.

&

$\forall y \neq x,\ y \in \beta(x): \pi(y,y) < \pi(x,y)$

Dk.: připomeň: $\pi(x,y) = x \cdot Ay$

lin. lin.

(+) $\pi(x-y, \underline{(1-\varepsilon)}x + \underline{\varepsilon}y) > 0$

$$(1-\varepsilon)\underbrace{\pi(x-y, x)}_{A} + \varepsilon\underbrace{\pi(x-y, y)}_{B} > 0$$

$y \neq x$ pevné

$\forall \varepsilon > 0$ malé

$$(1-\varepsilon)A + \varepsilon B > 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

$\iff$ $A > 0$ nebo $A = 0, B > 0$

$\iff$ $A \geq 0$ navíc: $\underbrace{A = 0 \Rightarrow B > 0}$

$\pi(y, x) \leq \pi(x, x)$ $\forall y \neq x$

$\Updownarrow$

$x \in \beta(x)$;

tj. x je N.e.

$\pi(y, x) = \pi(x, x)$;

tj. $y \in \beta(x)$

$\Downarrow$

$B > 0$; tj.

$\pi(y, y) < \pi(x, y)$

Pozn.: x je ESS $\Rightarrow$ $\forall y \neq x$, y blízké x

$\pi(y, y) < \pi(x, y)$.

dk.: $y \in \beta(x)$: již víme (2.4)

$y \notin \beta(x)$: potom: $\pi(y, x) < \pi(x, x)$

cíl: $\underbrace{\pi(y-x,y)}_{<0} = \underbrace{\pi(y-x,x)}_{<0} + \underbrace{\pi(y-x,y-x)}_{(?)}$

y blízké x — lineární — kvadratické

vůči $\boxed{y-x}$

Replikátorová dynamika (odvození)

značení: $\pi_i(x) := \pi(e^{(i)},x) = e^{(i)} \cdot Ax$ … zisk i-té strategie v pop.

$x \in \Delta$

$\pi(x) := \pi(x,x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \pi_i(x)$ … průměrný zisk celé pop.

a) axiomaticky

$x = x(t), \quad t \geq 0$

$$\boxed{x_i' = x_i \underbrace{g_i(x)}_{\text{koef. růstu}}}$$

monotonie

1) $g_i(x) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \right\} 0 \iff \pi_i(x) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \right\} \pi(x)$

regularity

2) $\sum_i x_i g_i(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta$

nejjednodušší model: $\boxed{g_i(x) = \pi_i(x) - \pi(x)}$

b) elementární odvození:

$$x_i = \frac{m_i}{\sum_j m_j}$$, kde m_i .... absolutní velikost i-té složky pop.

$$m_i' = r_i m_i \, , \quad \underbrace{r_i}_{\text{koef. růstu}} = \overset{\text{přir. dyn.}}{\alpha - \beta} + c\,\underbrace{\pi_i(x)}_{\text{hra}}$$

počítej:

$$x_i' = \left(\frac{m_i}{\sum_j m_j}\right)' = \frac{m_i'}{\sum_j m_j} - \frac{m_i \sum_j m_j'}{\left(\sum_j m_j\right)^2}$$

$$= r_i \underbrace{\frac{m_i}{\sum_j m_j}}_{x_i} - \underbrace{\frac{m_i}{\sum_j m_j}}_{x_i} \cdot \underbrace{\frac{\sum r_j m_j}{\sum_l m_l}}_{\sum_j r_j x_j}$$

$$x_i' = r_i x_i - x_i \sum_j r_j x_j$$

$$x_i' = \left(\cancel{\alpha-\beta} + c\pi_i(x)\right) x_i - x_i \underbrace{\sum_j \left(\alpha-\beta+c\pi_j(x)\right) x_j}$$

užij: $\sum_j x_j = 1$

$\sum_j x_j \pi_j(x) = \pi(x)$

$\cancel{\alpha-\beta} + c\pi(x)$

CELKEM:

$$\boxed{x_i' = c\,x_i\left(\underline{\pi_i(x) - \pi(x)}\right)}$$

Pozn.: „replikátorová rovnice" (BÚNO $c=1$)

koef. růstu x_i

$$\pi_i(x) - \pi(x) = \pi(e^{(i)}, x) - \pi(x, x)$$

$$= \pi(e^{(i)} - x, x)$$