# 4. Teorie her a replikátorová dynamika

**Def.** Hrou (2 hráčů tzv. v normálním tvaru) chápu:

$S_1, S_2$ ... (konečné) množiny strategií 1. resp. 2. hráče

$\pi_1 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ (řádkový resp. sloupcový)

$\pi_2 : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ ... výplatní fce

---

BÚNO: $S_1 = \{1, \dots, m\}$, $S_2 = \{1, \dots, m\}$

označ $\begin{bmatrix} A = (a_{kl}), & a_{kl} = \pi_1(k,l), \\ B = (b_{kl}), & b_{kl} = \pi_2(k,l) \end{bmatrix}$ , $k = 1, \dots m$, $l = 1, \dots, m$

$\Rightarrow$ hra $\Leftrightarrow$ $(A, B)$ .... výplatní matice $\in \mathbb{R}^{m \times m}$

Terminologie: (dvou)maticová hra

Speciálně: $A^T = B$ ... symetrická hra

$A^T = A = B$ .... dvojitě symetrická hra

$A = -B$ ... hra s nulovým součtem

(tj. $\pi_1 = -\pi_2$)

**Def.** Prostorem smíšených strategií 1. resp. 2. hráče chápeme

$$\Delta_1 = \{ p \in \mathbb{R}^m ; \; p_i \in [0,1] ; \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \}$$
$$\Delta_2 = \{ q \in \mathbb{R}^n ; \; q_j \in [0,1] ; \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \}$$

---

$S_1, S_2 \dots$ čisté strategie $\iff$ $e^{(k)} = (0, \dots 0, 1, 0 \dots)$ (k-tá pozice)

Interpretace
- pravděpodobnostně
- velká populace čistých hráčů

zobecněné výplatní fce: $(p,q) \in \Delta_1 \times \Delta_2$

$$\pi_1(p,q) = \sum_{i=1}^{m} p_i \underbrace{\pi_1(e^{(i)}, q)}_{= \sum_{j=1}^{n} q_j \underbrace{\pi_1(e^{(i)}, e^{(j)})}_{= a_{ij}}} = \sum_{i,j} p_i a_{ij} q_j = p \cdot Aq$$

analogicky:

$$\pi_2(p,q) = \sum_{i,j} p_i b_{ij} q_j = p \cdot Bq$$

**Def.** Strategii $p^* \in \Delta_1$ nazveme <u>nejlepší odpovědí</u> na strategii $q \in \Delta_2$, jestliže

$$\pi_1(p^*, q) = \max_{p \in \Delta_1} \pi_1(p, q).$$

Značíme: $p^* \in \underbrace{\beta_1(q)}$.

↖ množina nejlepších odpovědí na $q$.

**Zřejmě:** $\beta_1(q) \subset \Delta_1$ je neprázdná, kompaktní, konvexní.

($p \mapsto \pi_1(p, q)$ afinní)

**Analogicky definuji:** $\beta_2(p) \subset \Delta_2$ nejlepší odpovědi 2. hráče na $p$.

**Def.** nosič strategie:

$$C(p) = \{k ; p_k > 0\}$$

$$C(q) = \{\ell ; q_\ell > 0\}$$

**Lemma 3.** Platí $p \in \mathcal{B}_1(q) \iff e^{(r)} \in \mathcal{B}_1(q)$, pro $\forall r \in C(p)$.

**Dk/** $q \in \Delta_2$ ... pevné, označ: $v_1(q) = \max_{p \in \Delta_1} \pi_1(p,q)$ (hodnota hry)

víme: $$\pi_1(p,q) = \sum_{r=1}^{m} p_r \pi_1(e^{(r)}, q) = \sum_{r \in C(p)} p_r \pi_1(e^{(r)}, q)$$

$\Leftarrow$ jasné: $\pi_1(e^{(r)}, q) = v_1(q)$,

$$\pi_1(p,q) = \underbrace{\Big(\sum_{r \in C(p)} p_r\Big)}_{=1} v_1(q) = v_1(q)$$

$\Rightarrow$ nechť $p \in \mathcal{B}_1(q)$: TRIK:

$$0 = \pi_1(p,q) - \pi_1(p,q) = \sum_{r} p_r \pi_1(e^{(r)}, q) - \pi_1(p,q)$$

$$= \sum_{r} p_r \underbrace{\left[\pi_1(e^{(r)}, q) - \pi_1(p,q)\right]}_{(*)_r}$$

vidím: $(*)_{\mathfrak{z}} \leq 0 \quad \forall \mathfrak{z}$ (neboť $p \in \beta_1(q)$)

$\Rightarrow \forall \mathfrak{z}: \quad p_{\mathfrak{z}} > 0 \Rightarrow (*)_{\mathfrak{z}} = 0$, tj.

$$e^{(\mathfrak{z})} \in \beta_1(q)$$

**Def.** Dvojice strategií $(p^*, q^*) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ se nazve Nashovo ekvilibrium, jestliže

$$p^* \in \beta_1(q^*) \quad \& \quad q^* \in \beta_2(p^*).$$

**Věta 5.** $\exists$ N. e.

**Dk:** věta o pevném bodě (Brouwer: 2 hráči, obecněji: Kakutani)
(N-hráčů)

**Pozn.:** obecně ne jediné, ne čisté