Příklad 1.1 Nechť $\alpha < \tilde{\alpha}$ a $u \in H^{\tilde{\alpha}}$. Ukažte, že

$$\|u\|_{H^\alpha} \leq \lambda_1^{\frac{\alpha-\tilde{\alpha}}{2}} \|u\|_{H^{\tilde{\alpha}}}$$

Obecněji

$$\|Q_k u\|_{H^\alpha} \leq \lambda_{k+1}^{\frac{\alpha-\tilde{\alpha}}{2}} \|u\|_{H^{\tilde{\alpha}}}$$

Dedukujte odsud, že $P_k u \to u$ silně v H^α, $k \to \infty$. Ukažte konečně, že $H^{\tilde{\alpha}} \hookrightarrow H^\alpha$ hustě a kompaktně.

Příklad 1.2 (a) Ukažte, že $\|e^{-tA}u\|_{H^\alpha} \leq e^{-\lambda_{k+1}t}\|u\|_{H^\alpha}$, pro $u \in Q_k H^0$. Ukažte dále, že $\|e^{-tA}u\|_{H^\alpha} \leq M(\alpha)t^{-\frac{\alpha}{2}}\|u\|_{H^0}$, kde $M(\alpha) = (\alpha/2e)^{\alpha/2}$.
(b) Kombinací předchozích odhadů ukažte, že pokud $\omega_n < \lambda_{n+1}$, pak

$$\|e^{-tA}u\|_{H^\alpha} \leq M(\alpha, n, \omega_n)t^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\omega_n t}\|u\|_{H^0}, \qquad u \in Q_n H^0$$

kde $M(n, \alpha, \omega_n) = \left(\frac{\alpha\lambda_{n+1}}{2(\lambda_{n+1}-\omega_n)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}$.

K definici prostorů H^α a operátoru A viz ,,úvodní text“ na webu.

Nápomoc:

1.2 (a) V případě tzv. multiplikativních operátorů $T : \sum_j c_j u_j \mapsto \sum_j \mu_j c_j u_j$ je norma $H^\alpha \to H^\alpha$ rovna $\sup_j \mu_j$. Normu $u \mapsto e^{-tA}u$ z H^0 do H^α lze ekvivalentně chápat jako normu $u \mapsto A^{\alpha/2}e^{-tA}$ z H^0 do H^0, což je opět multiplikativní operátor s $\mu_j = \lambda_j^{\alpha/2}e^{-t\lambda_j}$; stačí tedy vyšetřit supremum funkce $\lambda \mapsto \lambda^{\alpha/2}e^{-t\lambda}$ pro $\lambda \geq 0$.

(b) Pišme $e^{-tA} = e^{-t_1 A}e^{-t_2 A}$ a použijme výše odvozené odhady norem $e^{-t_1 A} : H^\alpha \to H^\alpha$ a $e^{-t_2 A} : H^0 \to H^\alpha$. Volme rozklad $t = t_1 + t_2$ tak, že $\lambda_{n+1} t_1 = \omega_n t$.