Série 3

Příklad 1 Nechť X, Y a Z jsou normované prostory takové, že $Y \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow Z$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $c > 0$ takové, že

$$\|u\|_X \leq \varepsilon \|u\|_Y + c\|u\|_Z \,.$$

Příklad 2 [Verze Poincarého nerovnosti] Nechť $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je (hladká) funkce, jejíž nosič má v nějakém směru tloušťku $d < \infty$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x,y)|^p dxdy \leq d \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x,y)|^p dxdy$$

pro každé $p \in [1, \infty)$.

Nápověda: 1 – viz Lemma 3

2 – BÚNO $u(x,y) = 0$ pro $y \notin (0,d)$, tedy $|u(x,y)| \leq \int_0^d |\partial u/\partial y(x,\eta)| d\eta$; integrací dle $(x,y) \in \mathbb{R} \times (0,d)$ závěr pro $p = 1$. Pro obecné $p > 1$ navíc Hölderova nerovnost:

$$\left(\int_0^d y\right)^p \leq d^{p-1} \int_0^d y^p \,.$$