2. TERMÍN – 7.6.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. **[12b]** Je dána funkce

$$f(x) = |x| \sin x, \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

která je 2π-periodická.

(a) Najděte Fourierovy koeficienty.

(b) Čemu se rovná součet příslušné Fourierovy řady ? Nakreslete graf; podobně odůvodněte (zejména vypočtěte derivaci funkce f a vyšetřete její spojitost).

(c) Napište Parsevalovu rovnost (nejprve obecně a potom vyčíslete její části v tomto konkrétním případě).

(d) Ověřte, že lze aplikovat větu o derivování Fourierovy řady člen po členu. Vyjádřete f' pomocí trigonometrické řady.

---

2. **[12b]** (a) Vypočítejte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + ix + 12)^2}.$$

(b) Na základě tohoto výsledku (tj. bez výpočtu dalších integrálů) napište, čemu se rovná Fourierova transformace funkce $xf(x)$. (Ověřte předpoklady příslušné věty!)

---

3. **[8b]** Je dána funkce

$$f(z) = z \cos z - \exp z \sin z.$$

(a) Najděte první tři nenulové členy Taylorova rozvoje o středu 0.

(b) Jaký typ singularity má funkce $1/f$ v bodě 0? Najděte tři nenulové členy Laurentova rozvoje.

1. příklad [12b]

[4] ... Fourierovy koeficienty

[3] ... součet F.ř. (derivace f = 2 body)

[3] ... derivace člen po členu

[2] ... Parseval

---

2. příklad [12b]

[3] ... sestavení funkce F(z) + singularity

[4] ... výpočet reziduí

[2] ... limitní přechod přes půlkružnici

[3] ... transformace x.f(x)

---

3. příklad [8b]

[3] ... bod za každý člen v rozvoji f

[2] ... typ singularity

[3] ... bod za každý člen v rozvoji 1/f

$$\frac{\pi}{2} b_1 = \int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{2}\left(1-\cos 2x\right) dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

$$= \left[\frac{x}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} \qquad - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \quad ; \quad \boxed{b_1 = \frac{\pi}{2}}$$

$$k \geq 2: \ \frac{\pi}{2} b_k = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x \sin kx = \int_0^{\pi} x \cdot \left[\cos x(1-k) - \cos x(1+k)\right] dx$$

$$\sin\theta \sin\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)\right]$$

$$= \left[\frac{x}{2}\left(\frac{\sin x(1-k)}{1-k} - \frac{\sin x(1+k)}{1+k}\right)\right]_0^{\pi} \leftarrow 0 - 0$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\pi} - \frac{\sin x(k-1)}{k-1} + \frac{\sin x(k+1)}{k+1} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x(k-1)}{(k-1)^2} - \frac{\cos x(k+1)}{(k+1)^2}\right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{k-1}-1}{(k-1)^2}-\frac{(-1)^{k+1}-1}{(k+1)^2}\right)=\begin{cases}0\ ; & k \text{ liché.}\\ -\left(\frac{1}{(k-1)^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\end{cases}$$

k sudé :

$$=\frac{-4k}{(k^2-1)^2}$$

$$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$$

$$b_{2l}=\frac{-8l}{(4l^2-1)^2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{-16l}{\pi(4l^2-1)^2}\ ;$$

$$b_k=\frac{-8k}{\pi(k^2-1)^2}\ ;\quad k \text{ sudé}$$

$$0 \qquad k \text{ liché.}$$

$$F_{f,2m}(x)=\frac{\pi}{2}\sin x-\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{k\sin 2kx}{(4k^2-1)^2}$$

✓ o.k.

Parseval: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.

LS: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} I$;

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin^2 x = \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2}(1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi}}_{\frac{\pi^3}{2}} - \underbrace{\int_0^{\pi} x\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) dx}_{J}$$

$$J = \int_0^{\pi} x^2 - \int_0^{\pi} \frac{x}{2}\sin 2x \, dx = \frac{\pi^3}{3} - K$$

$$K = \underbrace{\left[-\frac{x}{2}\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}}_{-\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x \, dx}_{\frac{1}{8}[\sin 2x]_0^{\pi} = 0}$$

$$LS = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3} \checkmark_{\text{o.k.}}$$

$$PS = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{256}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(4k^2-1)^4}.$$

Derivace: $f(x) = |x| \cdot \sin x$

$$f'(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sin x + |x| \cos x$$

$$= \sin|x| + |x| \cos x \quad ; \quad x \neq 0.$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = \sin|x| + |x| \cos x \Big|_{x=0}$$

$$f'_-(\pi) = f'_+(-\pi) = -\pi.$$

$$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}) : \text{ neciální } F_f(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

dále: $|b_k| \le \dfrac{C}{k^3}$; $\to$ lze derivovat

člen po členu:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k \cdot \cos(kx) \quad ;$$

$$\sin|x| + |x| \cdot \cos x = \frac{\pi}{2} \cos x - \frac{32}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2} \cos 2kx$$

$x \in [-\pi, \pi]$

$$(x+4i)(x-3i) = x^2 + ix + 12$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+ix+12)^2}.$$

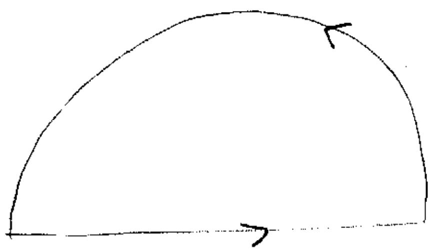
singularity: $z_1 = 3i$, $z_2 = -4i$ — 2. nás. póly.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx; \quad F(z) = \frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z^2+iz+12)^2}.$$

(i) $\xi < 0$:

$$\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2; \quad \varphi_1 = t,\ t \in [-R, R]$$

$$\varphi_2 = Re^{it},\ t \in [0, \pi].$$



$$\int_\varphi F(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{3i} F(z) = \left(\underbrace{\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z+4i)^2}}_{g(z)} \right)' \Bigg|_{z=3i}$$

$$g'(z) = e^{-2\pi i \xi z} \left(-2\pi i \xi \cdot \frac{1}{(z+4i)^2} - \frac{2}{(z+4i)^3} \right)$$

$$g'(3i) = e^{6\pi \xi} \cdot \left(\frac{2\pi i \xi}{49} + \frac{2}{49 \cdot 7i} \right)$$ v max.

lim. přechody: $R \to \infty$:

$$\int_{\varphi_1} F(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i \xi t}}{(t^2+it+12)^2}\,dt \to \hat{f}(\xi); \quad (\xi < 0.)$$

$$\left|\int_{\varphi_2} F(z)\,dz\right| \leq L(\varphi_2)\cdot \sup_{|z|=R} |F(z)|$$

$$L(\varphi_2) = \pi R$$

$$|F(z)| \leq \frac{C}{R^4}; \quad \text{navíc } \left|e^{-2\pi i \xi z}\right| = e^{Re(-2\pi i \xi z)}$$

$$= e^{2\pi \xi \operatorname{Im}(z)} \leq 1$$

$$\xi < 0; \ \operatorname{Im}(z) \geq 0.$$

---

celkem: $$\int_{\varphi} F(z) \to \hat{f}(\xi) = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{3i} F(z)$$

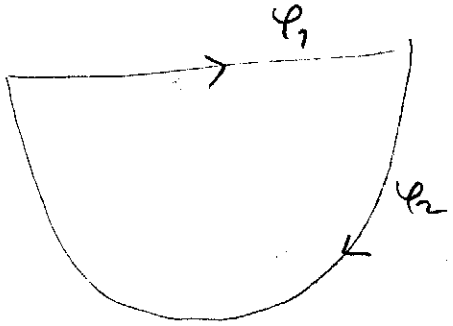
$$= e^{6\pi\xi}\left(\frac{4\pi}{343} - \frac{4\pi^2 \xi}{49}\right)$$

speciálně: $$\hat{f}(0) = \lim_{\xi \to 0-} \hat{f}(\xi) = \frac{4\pi}{343}$$ v o.k. max.

(ii) $\xi > 0$:

$\varphi_1 = t; \quad t \in [-R, R]$

$\varphi_2 = -Re^{it}; \quad t \in [0, \pi]$.



$\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$.

analogicky jako výše

$$\int_{\varphi_1} F(z)\,dz \to \hat{f}(\xi); \quad \xi > 0$$

$$\int_{\varphi_2} F(z)\,dz \to 0. \qquad -\int_{\varphi} F(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{-4i} F(z).$$

$$\operatorname{res}_{-4i} F(z) = \Bigg(\underbrace{\frac{e^{-2\pi i \xi z}}{(z-3i)^2}}_{g(z)}\Bigg)'\Bigg|_{z=-4i}$$

$$g'(z) = e^{-2\pi i \xi z}\left(\frac{-2\pi i \xi}{(z-3i)^2} - \frac{2}{(z-3i)^3}\right),$$

$$g'(-4i) = e^{-8\pi\xi} \cdot \left(\frac{+2\pi i \xi}{49} + \frac{2}{49 \cdot (-7i)}\right)$$

$$\hat{f}(\xi) = e^{-8\pi\xi}\left(+\frac{4\pi^2 \xi}{49} + \frac{4\pi}{343}\right)$$

$\xi > 0$

celkem: $$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{4\pi}{343} e^{-8\pi\xi}(1+7\pi\xi) ; & \xi \geq 0 \\ \frac{4\pi}{343} e^{6\pi\xi}(1-7\pi\xi) ; & \xi < 0. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) \text{ - spojité v } \mathbb{R} \\ |f(t)| \leq \frac{c}{|x|^4} ; \quad x \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow f(t);\ x f(t) \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \left[-2\pi i x f(t)\right]^\wedge(\xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{f}(\xi).$$

$$\left[x f(t)\right]^\wedge(\xi) = \frac{i}{2\pi} \hat{f}'(\xi) ;$$

$$\xi > 0: \quad \hat{f}'(\xi) = \frac{4\pi}{343} e^{-8\pi\xi}\left[7\pi - 8\pi(1+7\pi\xi)\right]$$

$$= \frac{4\pi^2}{343} e^{-8\pi\xi}(-56\pi\xi - 1).$$

$$\xi < 0: \quad \hat{f}'(\xi) = \frac{4\pi}{343} e^{6\pi\xi}\left[-7\pi + 6\pi(1-7\pi\xi)\right]$$

$$= \frac{4\pi^2}{343} e^{6\pi\xi}(-42\pi\xi - 1).$$

$$\hat{f}'(0) = \lim_{\xi \to 0\pm} \hat{f}'(\xi) = -\frac{4\pi^2}{343}.$$

$$f(R) = R\cdot\cos R - \sin R\cdot e^{R} = f_1(R) - f_2(R)$$

$$= R\cdot\left(1-\frac{R^2}{2}+\frac{R^4}{24}+\dots\right) - \left(R-\frac{R^3}{6}+\frac{R^5}{120}+\dots\right)$$

$$\cdot\left(1+R+\frac{R^2}{2}+\dots\right)$$

$$\sin R\cdot e^{R} = \left(R-\frac{R^3}{6}+\frac{R^5}{120}+\dots\right)\left(1+R+\frac{R^2}{2}+\frac{R^3}{6}+\frac{R^4}{24}+\dots\right)$$

$$= R + R^2 + R^3\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) + R^4\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)$$

$$= R + R^2 + \frac{R^3}{3} + \dots R^5\underbrace{\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{120}\right)}$$

$$f_2(R) = R + R^2 + \frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{30} \qquad \frac{5-10+1}{120} = \frac{-4}{120} = \frac{-1}{30}$$

$$f_1(R) = R - \frac{R^3}{2} + \frac{R^5}{24}$$

$$f(R) = -R^2 + R^3\underbrace{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}_{-\frac{5}{6}} + R^5\underbrace{\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{30}\right)}_{+\frac{3}{40}}$$

$$= -R^2 - \frac{5}{6}R^3 + \frac{4}{30}R^5 \quad \text{o.k.}$$

$$= R^2\left(-1-\frac{5}{6}R+\frac{3}{40}R^3+\dots\right)$$

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \underbrace{G(z)}_{\in \mathcal{H}(\mathcal{U}(0))};$$

$$G(z) = A + Bz + Cz^2 + \cdots$$

$$G(z) \cdot \left(-1 - \frac{5}{6}z + \frac{3}{40}z^3 + \cdots\right) = 1$$

$$\left(A + Bz + Cz^2 + \qquad\right)\left(-1 - \frac{5}{6}z + \frac{3}{40}z^3 + \cdots\right) = 1$$

z^0: $-A = 1$: $A = -1$

z^1: $-\frac{5}{6}A - B = 0$; $B = +\frac{5}{6}$

z^2: $-\frac{5}{6}B - C = 0$: $C = \frac{-25}{36}$

$$G(z) = -1 + \frac{5}{6}z - \frac{25}{36}z^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{f(z)} = -\frac{1}{z^2} + \frac{5}{6}z^{-1} - \frac{25}{36} + \cdots$$

v o.k.