1. TERMÍN - 31.5.2010

Používáte-li nějakou složitější větu (l'Hospitalovo pravidlo, věta o limitě složené funkce), není třeba formulovat znění, stručně však ověřte její předpoklady.

Definitivní výsledek a důležité mezivýsledky u každého příkladu zvýrazněte!

Veškeré úvahy řádně odůvodněte. Odevzdávejte prosím všechny použité výpočty.

---

1. [-**b**] Je dána funkce

$$f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x \in (0, \pi/2) \\ \pi - x & x \in (\pi/2, \pi) \end{cases}$$

která je sudá a 2π-periodická.
(a) Najděte Fourierovy koeficienty.
(b) Čemu se rovná součet příslušné Fourierovy řady ? Nakreslete graf; podobně odůvodněte.
(c) Nalezněte součet řady $1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \dots$.
(d) Napište Parsevalovu rovnost (nejprve obecně a potom vyčíslete její části v tomto konkrétním případě).
(e) Napiště vzorec o integrování Fourierovy řady člen po členu (opět nejprve obecně a potom vyčíslete jeho části v tomto konkrétním případě).

---

2. [-**b**] Nalezněte funkci $F(z)$ tak, aby integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3 + \cos 2x} dx$$

byl roven integrálu F podél (kladně orientované) jednotkové kružnice v komplexní rovině.
(a) Najděte singularity F – jakého jsou typu ?
(b) Vyčíslete daný integrál pomocí reziduové věty.

---

3. [-**b**] Je dána funkce

$$f(z) = \frac{z^2}{(\exp z - 1)^2}.$$

(a) V bodě $z_0 = 0$ určete: typ singularity, hodnotu rezidua a alespoň tři nenulové členy příslušného Laurentova rozvoje.
(b) Najděte všechny nenulové singularity funkce f. O jaký typ singularity se jedná? Naznačte, jak byste počítali příslušné reziduum (napište vzoreček pro konkrétní případ).

1. příklad [11b]

[4] ... Fourierovy koeficienty

[2] ... součet F.ř. (funkce po částech C^1: zdůvodnění podrobně)

[1] ... součet řady 1+1/9+1/25

[2] ... Parseval

[2] ... integrace člen po členu

---

2. příklad [11b]

[3] ... sestavení funkce F(z) + úprava

[3] ... singularity: výpočet a typ

[3] ... výpočet reziduí

[2] ... dopočet integrálu (=bonus za numericky správnou hodnotu)

---

3. příklad [10b]

[2] ... typ singularity v nule + správně zdůvodnění

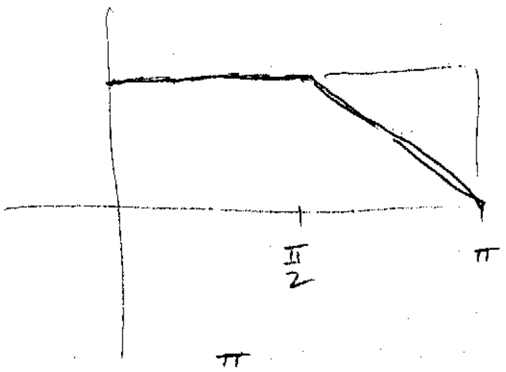
[4] ... 3 členy Laurentovy řady

[2] ... obecný tvar dalších singularit

[2] ... výpočet rezidua (není nutno zcela dopočítat tu limitu)

① $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\,; & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ (\pi - x)\,; & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$; 2π-periodické!

sudé:



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

$b_k = 0$ (sudé)

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx = \frac{2}{\pi} I_k\,;$$

$k \geq 1$

$$I_k = \int_0^\pi f(x)\cos kx = \left[f(x)\,\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi f'(x)\sin kx\,dx$$

$$= \frac{1}{k}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin kx\,dx = \frac{1}{k^2}\left[-\cos kx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{k^2}\,d_k$$

$$d_k = \cos k\frac{\pi}{2} - \cos k\pi = -2\sin\frac{3\pi k}{4}\cdot\sin\left(-\frac{\pi k}{4}\right)$$

$$\left(\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$= 2(-1)^{k+1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right).$$

$f(t)$ .. spojité

$f'(t) = 0; \; x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\longrightarrow$ $f(t)$ po částech C^1;

$= -1; \; x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$+1 \; ; x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ $F_f(t) = f(t) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$f(t) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} \sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{k^2} \cos kx.$$

---

tedy: $x = \frac{\pi}{2}$: $\quad \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} \sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{k^2} \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

k .. liché: $\cos \frac{k\pi}{2} = 0$

$k = 4l$: $\sin^2\left(\frac{4l\pi}{4}\right) = 0$

$k = 4l+2$: $\cos(4l+2)\frac{\pi}{2} = \cos(2\pi l + \pi)$

$= (-1)$.

$\sin(4l+2)\frac{\pi}{4} = \sin(\pi l + \frac{\pi}{2})$

$= (-1)^l.$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} + \sum_{l=0}^{\infty} (-1) \cdot \frac{4}{\pi} \cdot 1 \cdot \frac{1}{(4l+2)^2} (-1)$$

$$\frac{\pi}{8} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2}$$

Parseval: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right)$

LS: $\frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{8} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx\right)$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3}$$

PS: $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\pi^2}{16} = \frac{9\pi^2}{32}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 k^4}\cdot\sin^4\left(\frac{k\pi}{4}\right)$.

---

integrace: $\int_0^{x} f(t)\,dt - \frac{3\pi}{8}x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi}\cdot\sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)\frac{1}{k^3}\sin kx$.

LS: $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$: $\int_0^{x} f(t)\,dt = x\cdot\frac{\pi}{2}$.

$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$: $\int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x}(\pi - x)\,dx$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left[-\frac{1}{2}(\pi-x)^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\pi-x)^2\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{3+\cos 2x}\,dx\,;$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}\left(e^{2xi}+e^{-2xi}\right) = \frac{1}{2}\left((e^{it})^2+(e^{-it})^2\right) = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right).$$

jinak: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$= \left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{z}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[z^2+2+\frac{1}{z^2}+z^2-2+\frac{1}{z^2}\right].$$

$$= \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right).$$

$$F(z) = \frac{\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}{3+\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}\cdot\frac{1}{iz}\,;$$

$$= F(z)\cdot\frac{z}{z} = \frac{-z^2+1}{6z^2+(z^4+1)}\,;$$

$z^4+6z^2+1=0$; $z^2=y$

$y^2+6y+1=0$; $y=$

$D = 36-4 = 32 = 2\cdot 16$

$$y = \frac{-6\pm 4\sqrt{2}}{2} = -3+2\sqrt{2} \doteq -0.2 = -r.$$

$$-3-2\sqrt{2} < -3$$

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{\gamma} = \pm i\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,.$$

$$I = 2\pi i \cdot \left(\operatorname{res}_{z_1} F(z) + \operatorname{res}_{z_2} F(z) \right).$$

$$\operatorname{res}_{z_1} F(z) = \left.\frac{z^2-1}{(6z^2+z^4+1)'}\right|_{z_1} = \left.\frac{z^2-1}{12z+4z^3}\right|_{z_1}$$

$$= \left.\frac{z^2-1}{z(12+4z^2)}\right|_{z_1} = \frac{-\gamma-1}{z_1(12-4\gamma)}\,.$$

$$\operatorname{res}_{z_2} F(z) = \left.\frac{z^2-1}{z(12+4z^2)}\right|_{z_2} = \frac{-\gamma-1}{z_2(12-4\gamma)}$$

$$I = 2\pi i \cdot \frac{-\gamma-1}{12-4\gamma} \cdot \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = 0\,.$$

③ $f(z) = \dfrac{z^2}{(e^z-1)^2}$;

sing.: $e^z = 1 = e^0$

$z = z_k = 2k\pi i$; $k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{z_0 = 0:}$ $\dfrac{z^2}{(e^z-1)^2}$ ... odstranitelná singularita

čitatel $\sim z^2$.

$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

$$(e^z-1)^2 = z^2 + z^3 + z^4 \underbrace{\cancel{\left(2\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)}}_{\frac{7}{12}} + \dots \qquad \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$z^2 = (A + Bz + Cz^2 + \dots)\left(z^2 + z^3 + \frac{7}{12}z^4 + \dots\right)$$

z^2: $1 = A$

z^3: $0 = A + B$; $B = -1$

z^4: $0 = \cancel{\frac{2}{3}}\,\frac{7}{12} + B + C$: $C = +\cancel{\frac{1}{3}}\,\frac{5}{12}$

$$f(z) = 1 + z + \cancel{\frac{1}{3}}\,z^2 + \dots$$

$$\operatorname{res}_0 f(z) = 0 \cdot \frac{5}{12}$$

$R_k \neq 0$: 2-násobné póly:

$$\mathrm{res}_{R_k} = \lim_{R \to R_k} \underbrace{\left[(R-R_k)^2 f(R) \right]}_{g(R)}{}' \; ;$$

$$g(R) = \left(\frac{R^2 (R-R_k)^2}{(e^R-1)^2} \right)' = \left(\left(\frac{R(R-R_k)}{e^R-1} \right)^2 \right)'$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{R(R-R_k)}{e^R-1} \right) \cdot \frac{1}{(e^R-1)^2} \left[(2R-R_k)(e^R-1) - e^R R (R-R_k) \right]$$

$$[\quad] =$$