Aplikace určitého integrálu

1. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $xy = 4$, $x + y = 5$.

2. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

3. Nalezněte obsah elipsy s poloosami a, b.

4. Nalezněte obsah oblasti ohraničené kardioidou $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

5. Nalezněte obsah oblasti ohraničené lemniskátou $r = 4\sin^2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

6. Nalezněte obsah oblasti ohraničené $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

7. Odvoďte vztahy pro objem koule, kuželu, jehlanu.

8. Odvoďte vztah pro délku kružnice.

9. Spočtěte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.

10. Spočtěte délku evolventy kruhu $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

11. Odvoďte vzorec pro povrch koule.

12. Nalezněte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = x^3$, $|x| \leq 1$ kolem osy x.

13. Nalezněte polohu těžiště homogenní oblasti ohraničené křivkami $y = x$ a $y = x^2$.

14. Nalezněte polohu těžiště homogenního půlkruhu o poloměru r.

15. Nalezněte polohu těžiště homogenního čtvrtkruhu o poloměru r.

16. Spoctete limity:

    (a)

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}$$

    (b)

    $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n} \right)$$

    (c)

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n!)}{n}$$

    Navod: soucty odhadnete pomoci integralu.

17. Mravenci vědí, že larvy rostou úměrně teplu. Nevědí však, zda je výhodnější chovat larvy v podzemí mraveniště, kde je celý den teplota 15 mravenčích stupňů, nebo v nadzemí, kde teplota v noci rovnoměrně klesá ze 16 na 12 stupňů, zatímco ve dne rovnoměrně stoupá z 12 na 16. Dokážete jim poradit?

18. Na zemi jsou nakresleny rovnoběžné čáry s roztečí 1. Upustíme-li tyčku o délce 1, jaká je pravděpodobnost, že nezůstane ležet přes žádnou z čar?

19. Podle řecké mytologie měl Herakles splnit králi Eurystheovi 12 úkolů. Nedávno se ukázalo, že úkolů bylo ve skutečnosti 13. Jako poslední úkol měl Herakles nabarvit tzv. Diovu amforu. Třebaže se jedná o nekonečnou nádobu s nekonečným povrchem, Herakles neklesl na mysli a povšiml si, že nádoba má konečný objem - stačilo ji tedy naplnit (konečnou) trochou barvy, zbytek vylít a úkol byl splněn.

    Je to vůbec možné?

    Existuje nádoba s nekonečným povrchem a konečným objemem?