ODR2 – 2. termín (4. 2. 2021)

1. příklad [**5b**] Uvažujte soustavu

$$x' = -ay + x(1 - x^2 - y^2)$$
$$y' = bx + y(1 - x^2 - y^2)$$

kde $ab > 0$.
(i) Vyšetřete stacionární body a jejich stabilitu. Načrtněte chování řešení na jejich okolí.
(ii) Ukažte, že dostatečně velká koule o středu v počátku je pozitivně invariantní.
(iii) Ukažte, že existuje alespoň jedno netriviální periodické řešení.

2. příklad [**8b**] Uvažujte úlohu

$$x'' = x + u$$
$$x(0) = x_0$$
$$x'(0) = y_0$$

s měřitelnými regulacemi $u(t) : [0, \infty) \to [-1, 1]$.
(i) Načrtněte průběhy různých řešení v rovinně pro hodnoty $u \equiv 1$ resp. $u \equiv -1$. Je úloha (globálně či lokálně) regulovatelná?
(ii) Najděte nutné podmínky, za nichž je $u(t)$ časově optimální regulace, tj. $x(t^*) = x'(t^*) = 0$ nastává v nejkratším čase $t^* = 0$.
(iii) Ukažte, že časově optimální regulace existuje a sestrojte ji pro různé příklady počátečních podmínek.

3. příklad [**7b**] Nechť k je přirozené číslo. (i) Ukažte, že soustava

$$x' = xy^k$$
$$y' = -y - \sin x^2$$

má v okolí $(0, 0)$ centrální varietu tvaru $y = \phi(x)$.
(ii) Najděte alespoň dva nenulové členy Taylorova rozvoje $\phi(x)$ v počátku.
(iii) Rozhodněte v závislosti na parametru k, zda je počátek stabilní a zda je asymptoticky stabilní.

① (i) zřejmě $(0,0)$ je stac. bod

? $\exists$ jiné? NE! .....

$$\begin{aligned} -ay &= x(1-x^2-y^2) \\ bx &= y(1-x^2-y^2) \end{aligned}$$

(dělíme)

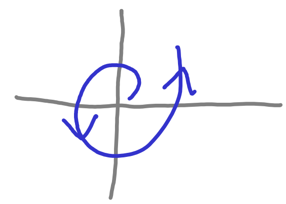
$$\underbrace{-\frac{a}{b}}_{<0} = \underbrace{\frac{x^2}{y^2}}_{>0} \quad \lightning$$

linearizace v $(0,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1, & -a \\ b, & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \operatorname{tr} A &= 2 > 0 \\ \det A &= 1 + ab > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0}$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ je negativně stabilní

tj. $(0,0) \notin \omega(p)$ $\forall p \neq (0,0)$



(ii) pomocné fce $V = x^2 + y^2$ (= vzdálenost od $(0,0)$ na druhou)

$$\dot{V} = 2xx' + 2yy' = 2\{\underbrace{(b-a)xy}_{|\dots| \le c r^2} + \underbrace{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}_{= r^2(1-r^2)}\}$$

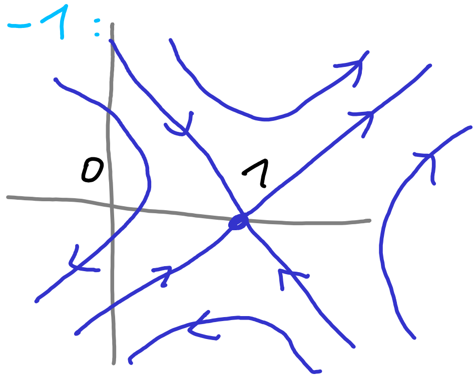
kde $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $c = |b-a|$

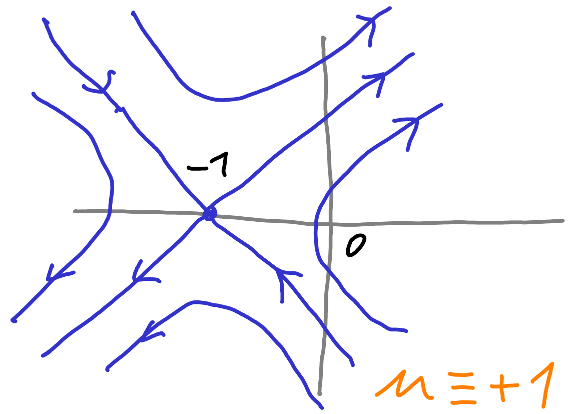
$$\Rightarrow \dot{V} \le 2[(c+1)r^2 - r^4] < 0 \quad \forall r > \sqrt{c+1}$$

(iii) .... Věta 15.1. (Poincaré–Bendixson)

② (i) ... elementární úvahy,
1. integrál $(x')^2-(x\pm1)^2=C$

$u\equiv-1$:





$u\equiv+1$:

? regulovatelnost: lokálně ano (Věta 18.3)

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $K(A,B)=A$

(hodnost $=2$)

globálně ne: např. v oblasti $x,y\geq 2$
je $x',y'\geq 1$, nevrátíme se $u\in[-1,1]$

(ii) ... užijí Větu 18.10 (nutné podmínky)

$\exists\, h=(h_1,h_2)\neq(0,0)$ t.ž.

$$h^T e^{-tA}Bu(t)=\max_{|\eta|\leq 1} h^T e^{-tA}B\eta$$

$$e^{-tA}=\begin{pmatrix}\cosh t, & -\sinh t\\ \sinh t, & \cosh t\end{pmatrix} \Rightarrow h^T e^{-tA}B=$$

$$=-h_1\sinh t+h_2\cosh t$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \operatorname{sgn}\underbrace{\left(-h_1 \cosh t + h_2 \cosh t\right)}$$

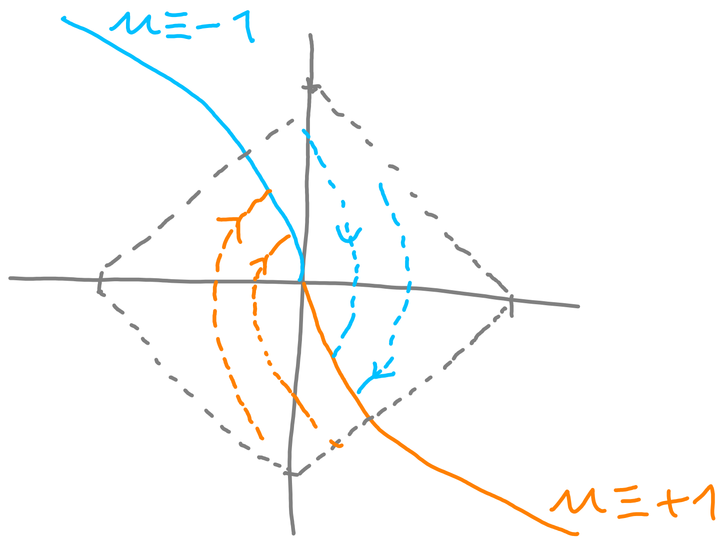
$$= \underbrace{\cosh t}_{>0} \cdot \left(-h_1 + h_2 \operatorname{tgh} t\right)$$

rostoucí

$\Rightarrow \quad u(t) = \pm 1$, nejvýše jedna změna znaménka

---

(iii)



3 (i) Věta 20.1 .... $m=n=1$, $A=0$, $B=-1$

$$f = xy^r, \quad g = -\sin x^2$$

$\Rightarrow$ $\exists$ c.v. $y=\phi(x)$

$$M\phi(x) = \frac{d}{dt}\big(\phi(x)-y\big) = \phi'(x)\cdot x' - y'$$

$$= \phi'(x)\cdot xy^r - (-y-\sin x^2) = x\phi'(x)(\phi(x))^r + \phi(x) + \sin x^2$$

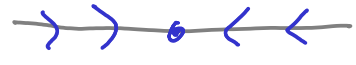
(iii)

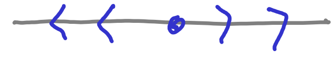
zkusme: $\psi(x) = cx^2$ .... $\underbrace{2cx^2(cx^2)^r}_{\text{aspoň: } O(x^{2+2})} + \underbrace{cx^2 + \sin x^2}$

polož: $c=-1$ $\Rightarrow$ $O(x^6)$

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = -x^2 + O(x^4)$$

reduk. rce:
$$z' = z\left(-z^2 + O(z^4)\right)^r$$
$$= (-1)^r z^{1+2r} + \dots$$

r liché $\Rightarrow$ asympt. stab. 

r sudé $\Rightarrow$ nestabilní 

ad (ii) ... řešíme ne hodnotě $r \geq 1$

(trochu komplikované)

$k \geq 3$ ... volme $\psi(x) = -\sin x^2 = -x^2 + \frac{1}{6}x^6 + O(x^{10})$

(neboť $x\phi'(x)\phi^k(x) = O(x^{2+2k})$, $2+2k \geq 8$)

$k = 2$ ... lze volit $\psi(x) = -x^2 + bx^6$

$$x\psi'(x)\psi^2(x) + \psi(x) + \sin x^2$$

$$= \underbrace{(-2x^2 + 6bx^6)\cdot(-x^2+bx^6)^2}_{-2x^6 + \dots} - x^2 - bx^6 + x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \dots$$

$$\Rightarrow \quad b = 2 + \frac{1}{6}$$

$k = 1$ ... musíme zvolit $\psi(x) = -x^2 + ax^4 + bx^6$

$$M\psi(x) = (-2x^2 + 4ax^4 + 6bx^6)\cdot(-x^2 + ax^4 + bx^6)$$
$$- x^2 + ax^4 + bx^6 + x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \dots$$

koef. x^4: $\Rightarrow$ $2 + a = 0$

koef x^6: $\Rightarrow$ $-6a + b - \frac{1}{6} = 0$

$$a = -2, \quad b = \frac{1}{6} - 12$$