Příklad 4.1 [Slabá formulace laplaciánu.] Nechť $u \in C^2(\Omega)$ a nechť existuje $f \in C(\Omega)$ tak, že

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ukažte, že potom $-\Delta u = f$ všude v Ω.

Příklad 4.2 Ukažte, že normu $u \in C([0,T]; L^2)$ lze odhadnout pomocí $u \in L^2(0,T; W_0^{1,2})$ a $\partial_t u \in L^2(0,T; W^{-1,2})$. Předpokládejte, že u je hladká.

Příklad 4.3 Z faktu, že $W_0^{1,2}(\Omega)$ je kompaktně a hustě vnořen do $L^2(\Omega)$ dedukujte následující: **Lemma.** Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečně-dimenzionální ON projekce P_n v $L^2(\Omega)$ taková, že

$$\|u\|_2 \le \varepsilon \|u\|_{1,2} + \|P_n u\|_2 \qquad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{Q}$$

a lze navíc požadovat $P_n : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$.

Příklad 4.4 [Aubin-Lionsovo lemma.] Ukažte, že omezenost u v normě $L^2(0,T; W_0^{1,2})$ a zároveň $\partial_t u$ v normě $L^2(0,T; W^{-1,2})$ implikuje relativní kompaktnost v normě $L^2(0,T; L^2)$.

Nápomoc:

4.1 – Uvažujte nejprve $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$; vhodnou volbou (posloupnosti) $\varphi = \varphi_n$ odvoďte, že $u'(x_0) - u'(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f$ pro libovolné dané x_0, $x_1 \in (a,b)$ a odtud závěr.

– Užijte předchozí bod a Fubiniovské počítání k odvození, že $\int_{\partial B} \nabla u \cdot \nu dS = \int_B f$, kde $B \subset \Omega$ je libovolná krychle, ν vnější normála. Aplikujte Gaussovu větu.

4.2 – Pište $\|u(t)\|_2^2 = U_1(t) + U_2(t)$, kde $U_1(t) = \frac{t}{T}\|u(t)\|_2^2$, $U_2(t) = (1 - \frac{t}{T})\|u(t)\|_2^2$. Stačí odhadnout např. U_1.

– Pište $U_1(t) = \int_0^t U_1'(s)\, ds$ a odhadněte, mj. s užitím $\int_\Omega \partial_t u\, u \le \|\partial_t u\|_{-1,2}\|u\|_{1,2}$ a Hölderovy nerovnosti.

4.3 – Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Předpoklad hustoty dává existenci ON (vůči L^2) posloupnosti ON takové, že $P_n u \to u$ v L^2 pro každé pevné u, navíc však $P_n u \in W_0^{1,2}$.

– Předpokládejme, že (Q) neplatí pro žádné n. Tedy existuje posloupnost u_n t.ž. $\|u_n\|_2 > \dots$ a búno $\|u_n\|_2 = 1$.

– Předpoklad kompaktnosti vede k výběru silně konvergentní podposloupnosti a posléze ke sporu.

4.4 – Nechť $\eta > 0$ je dáno; ukažte, že omezenost norem v předpokladu implikuje existenci η-sítě v normě $L^2(0,T;L^2)$.

– Předchozí úloha 4.3 při vhodné volbě ε implikuje, že stačí najít $\tilde{\eta}$-síť pro funkce $P_n u(t) : [0,T] \to P_n(W_0^{1,2}) \equiv \mathbb{R}^n$

– Pro funkce $P_n u(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ existuje síť vůči $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ normě. Uvažte, že je-li $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ báze P_n, pak j-tá složka $P_n u$ je funkce $t \mapsto \int_\Omega u(t)\phi_j$. A ta je 1/2-hölderovská.