# Nekonečně malá čísla

Dalibor Pražák, KMA MFF UK

říjen 2014

**Abstrakt**

V jakém smyslu existují nekonečně malá čísla? V následujícím textu se pokoušíme řešit tento problém. Do jisté míry problematizujeme samotnou otázku (Co je ,,číslo"? Co znamená v matematickém smyslu ,,existovat"?)

Vycházíme z konkrétní úlohy výpočet plochy pod grafem funkce. Diskutujeme různá řešení a přitom se snažíme tematizovat aspekty, které se obvykle nacházejí na hranici či vně matematického zájmu. V tomto smyslu je náš text pokusem i o *filosofickou* úvahu.

**Úloha.** Spočtěte plochu pod grafem funkce $f(x) = x^2$ mezi 0 a 1.

**Komentář 0.** Pokusme se problematizovat samotnou úlohu. Odkud je zřejmé, že musí existovat číslo, které se rovná uvedené ploše? Víme, že geometricky definovaná veličina nemusí být popsatelná číslem (určitého druhu). Délka úhlopříčky jednotkového čtverce ($\sqrt{2}$) je iracionální číslo; tedy neexistuje pro pythagorejského matematika. Délka kružnice o průměru jedna ($\pi$) není konstruovatelné (je dokonce transcendentní) číslo; tedy neexistuje ve světě eukleidovských konstrukcí.

**Řešení 1.** [Riemannovské řešení.] Předpokládejme, že $P$ je číslo, rovnající se hledané ploše. Rozdělíme interval $[0, 1]$ na $n$ stejných dílků a provedeme horní odhad $S_n$ a dolní odhad $s_n$ pomocí obdélníků šířky $1/n$. Podrobněji, definujeme dělící body $x_j = j/n$, kde $j = 0, \dots, n$ a velikost plochy mezi $x_j$ a $x_{j+1}$ odhadneme shora jako $\left(\frac{j+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$ respektive zdola jako $\left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$. Máme

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{3n}\right) > \frac{1}{3} - \frac{1}{2n}$$

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{3n}\right) < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

Tedy

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} < P < \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

Nerovnosti platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto musí být $P = \frac{1}{3}$.

**Komentář 1.** Forma řešení je následující: předpokládejme, že $P$ je číslo plochy. Potom $P$ je blíže k $1/3$ než $1/n$ pro libovolné přirozené $n$. Řešení nás učí jistou *techniku* (dělení na úzké obdélníky) a vyžaduje určitou *zběhlost* v algebře a při práci s nerovnostmi. Při výpočtu jsme použili vzoreček

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

a provedli zjednodušující odhady $1 - \frac{1}{3n} < 1$ a $1 + \frac{1}{3n} < 2$.

**Řešení 2.** [Newton-Leibniz.] Formulujme úlohu obecněji: nechť $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$ je daná funkce. Předpokládejme, že $0 \in (a,b)$ a označme $\Phi(x)$ číslo, odpovídající ploše mezi $0$ a $x$, kde $x \in (a,b)$ je libovolné.

**Věta 2.1** Nechť $f(x)$ je spojitá. Potom $\Phi'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$.
*Důkaz.* Nechť $x \in (a,b)$ je pevné. Chceme ukázat, že $\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} = f(x)$, neboli

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\Big[0 < |h| < \delta \implies \left|\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon\Big]$$

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Dle předpokladu je $f(x)$ spojitá v bodě $x$, tj. existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, neboli $f(y)$ leží mezi $f(x) - \varepsilon$ a $f(x) + \varepsilon$. Tedy pokud $|h| < \delta$, leží $\Phi(x+h) - \Phi(x)$ (tj. plocha mezi $x$ a $x+h$) mezi $(f(x) - \varepsilon)h$ a $(f(x) + \varepsilon)h$. Pro $h \neq 0$ je to právě hledaný závěr. □

Ukázali jsme, že $\Phi(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$. K dokončení výpočtu potřebujeme jednu tzv. „hlubší větu".
**Věta 2.2.** Nechť $f(x) : (a,b) \to \mathbb{R}$, nechť $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Potom $F(x) - G(x)$ je konstantní v $(a,b)$.
*Důkaz.* Viz např. Jarník, DI, Věta 136, s. 248. □

Zpět k naší úloze: zajímá nás $P = \Phi(1)$. A také víme, že $F(x) = x^3/3$ je primitivní funkce k $x^2$. S ohledem na fakt, že $\Phi(0) = 0$ a Větu 2.2 máme celkem

$$P = \Phi(1) - \Phi(0) = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}.$$

**Komentář 2.** Moderní řešení, pracující s pojmy *spojitost* a *derivace*, vyjádřenými v „epsilon-delta" jazyce. Poměrně elegantní postup přirozeně vyžaduje obecnější formulaci naší úlohy. Funkce přírůstek plochy $\Phi(x)$ může být obecně záporná, a to dokonce ze dvou důvodů: $x$ je menší než $0$ a obecně i integrovaná funkce $f(x)$ může být záporná.
Užitečnost přístupu je v tom, že k určení plochy dostáváme vzoreček (stačí uhodnout primitivní funkci). Nevýhodou (na rozdíl od Riemannovského řešení) je ztráta bezprostřední zřejmosti výpočtu.
Hlubší Věta 2.2 potřebuje axiom o supremu, a tedy práci v oboru reálných čísel $\mathbb{R}$.

Nyní se pokusíme tytéž úvahy provést pomocí nekonečně malých veličin. K otázce jejich existence se vrátíme na konci textu.

**Řešení 1b.** Rozdělíme interval $[0,1]$ na $N$ stejných dílků, kde $N$ je *nekonečně velké* přirozené číslo, s dělícími body $x_j = j/N$, $j = 0, \dots, N$. Součet příslušných dolních obdélníků je opět

$$s_N = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2N}\left(1 - \frac{1}{3N}\right)$$

Protože $N$ je nekonečně velké, je poslední výraz nekonečně blízko $1/3$. Nyní odhadneme chybu, jíž se $s_N$ liší od celkové plochy $P$. Zjevně $0 \le P - S_N \le \sum_{j=0}^{N-1} Z_j$, kde $Z_j$ jsou trojúhelníky o základně $1/N$ a výšce

$$x_{j+1}^2 - x_j^2 = \frac{1}{N^2}\big((j+1)^2 - j^2\big) = \frac{2j+1}{N^2} < \frac{2N+1}{N^2} = \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2}$$

pro každé $j = 0, \dots, N-1$. Tedy

$$\sum_{j=0}^{N-1} Z_j < N \cdot \frac{1}{N} \cdot \left(\frac{2}{N} + \frac{1}{N^2}\right) = \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2},$$

což je opět nekonečně malé.

**Komentář 1b.** Předpokládáme, že existují nekonečně velká přirozená čísla (avšak různá od $+\infty$) a pracujeme s nimi obvyklým způsobem (aritmetika, nerovnosti). Užili jsme tvrzení, že pokud $N$ je nekonečně velké a $b$ *není* nekonečně velké, pak $b/N$ je nekonečně malé.
Jádro úvahy je následující: rozdělením plochy na nekonečně úzké proužky ukážeme, že výsledek je nekonečně blízko $1/3$.

**Řešení 3.** Uvažujme opět obecnou funkci $f(x)$ v $(a,b)$. Pro zjednodušení zavedeme symbol $x \approx y$ ve významu „x je nekonečně blízko y".

**Definice.** Funkce $f(x)$ se nazve $\iota$-spojitá v $I$, jestliže pro libovolná $x$, $y \in I$ platí: je-li $x \approx y$, pak $f(x) \approx f(y)$.
Funkce $F(x)$ se nazve $\iota$-primitivní funkce k $f(x)$ v $I$, jestliže pro libovolná $x$, $y \in I$ platí: je-li $x \approx y$ a $x \neq y$, pak $\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \approx f(x)$.
Je-li $f(x)$ navíc $\iota$-spojitá, můžeme ekvivalentně požadovat $\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \approx f(\xi)$ pro každé $\xi \in I$, $\xi \approx x$.

**Definice.** Nekonečně jemným dělením intervalu $[a,b]$ rozumím rostoucí posloupnost bodů $\{x_j\} = \{x_j\}_{j=0}^N$ takovou, že $x_0 = a$, $x_N = b$ a $x_{j-1} \approx x_j$ pro každé $j = 1, \dots, N$.
Body integrace příslušnými k danému dělení $\{x_j\}$ rozumím posloupnost $\{\xi_j\} = \{\xi_j\}_{j=1}^N$ takovou, že $\xi_j \approx x_j$ pro každé $j = 1, \dots, N$.
Všimněme si, že obecně nepožadujeme $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

**Definice.** Nechť $f(x)$ je $\iota$-spojitá v $I$, nechť $[a,b] \subset I$ je omezený a uzavřený interval. Definujeme

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^N f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \tag{1}$$

kde $\{x_j\}$ je libovolné nekonečně jemné dělení intervalu $[a, b]$ s příslušnými body integrace $\{\xi_j\}$. Následující tvrzení nám zaručuje, že definice je – až na nekonečně malou chybu – korektní.

**Lemma 3.1** Nechť $f(x)$ je $\iota$-spojitá v $[a, b]$. Potom pro libovolná nekonečně jemná dělení $\{\xi_j\}_{j=0}^{N}$, $\{\tilde{x}_j\}_{j=0}^{\tilde{N}}$ s příslušnými body integrace $\{\xi_j\}_{j=1}^{N}$ respektive $\{\tilde{\xi}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$ platí

$$\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \approx \sum_{j=1}^{\tilde{N}} f(\tilde{\xi}_j)(\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1})$$

*Důkaz.* 1. Dokažme nejprve nezávislost na volbě bodů integrace. Nechť $\{x_j\}$ je dělení a $\{\xi_j\}$ respektive $\{\tilde{\xi}_j\}$ jsou libovolné body integrace. Potom

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{N} f(\tilde{\xi}_j)(x_j - x_{j-1})\Big| \\
&\qquad = \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j (x_j - x_{j-1}) \le \epsilon \sum_{j=1}^{N} (x_j - x_{j-1}) = \epsilon(b-a) \approx 0.
\end{aligned}$$

Zde značíme $\epsilon_j = |f(\xi_j) - f(\tilde{\xi}_j)|$; dle předpokladu je $\xi_j \approx x_j \approx \tilde{\xi}_j$, tedy $\epsilon_j \approx 0$ a konečně též $\epsilon := \max\{\epsilon_j;\ j = 1, \dots N\}$ je nekonečně malé.
2. V obecném případě nutno nejprve uvážit, že součet přes dané dělení lze formálně napsat jako součet přes libovolné jemnější dělení: bodům, které přibudou v intervalu dělení $[x_{j-1}, x_j]$, přiřadíme týž společný bod integrace $\xi_j$. Protože $\xi_j \approx x_j \approx x_{j-1}$, bude $\xi_j$ jistě nekonečně blízký i novým dělicím bodům.
Součty přes libovolná dělení pak napíšeme jako součty přes společné zjemnění, lišící se pouze v bodech integrace. To jsme však již vyřešili v bodě 1. □

Integrál je definován libovolnou hodnotou v jistém nekonečně malém rozmezí. Volíme-li body integrace $\xi_j$ tak, že $f(\xi_j)$ je největší resp. nejmenší hodnota $f$ v intervalu $[x_{j-1}, x_j]$, vidíme, že v daném rozmezí leží i horní resp. dolní odhad počítané „plochy pod grafem“.
Souvislost integrálu a primitivní funkce řeší následující věta.

**Věta 3.1** Nechť $f(x)$ je $\iota$-spojitá, nechť $F(x)$ je $\iota$-primitivní funkce k $f(x)$ v $[a, b]$. Potom

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \approx F(b) - F(a)$$

*Důkaz.* Nechť $\{x_j\}$ je libovolné nekonečně jemné dělení $[a, b]$. Potom

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= \sum_{j=1}^{N} F(x_j) - F(x_{j-1}) && (2)\\
&= \sum_{j=1}^{N} \left( f(x_j) + \frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} - f(x_j) \right)(x_j - x_{j-1}) && (3)\\
&= \sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j (x_j - x_{j-1}), && (4)
\end{aligned}$$

Jistě $x_j = \xi_j$ je přípustná volba bodů integrace, tedy první sumu lze vzít za definici integrálu. Protože

$$\epsilon_j = \frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} - f(x_j) \approx 0$$

dle předpokladů, je druhá suma nekonečně malá na základě argumentu z Lemmatu 3.1. $\square$

**Komentář 3.** Nepodali jsme zde nic jiného než definici Riemannova integrálu pro spojité funkce a jeho výpočet pomocí Newton-Leibnizovy formule, to vše v jazyce nekonečně malých veličin neboli NSA („nestandardní analýzy“). Naším cílem bylo přesvědčit čtenáře, že naznačený postup je srozumitelný a zároveň přesvědčivý i na dané „intuitivní“ úrovni. Zároveň snad přináší aspekty, které v obvyklém zpracování nevidíme.

Lze si lehce ověřit, že funkce $f(x) = x^2$ je $\iota$-spojitá, a $F(x) = x^3/3$ je její $\iota$-primitivní funkce; a podobně pro jiné elementární příklady.

Poznamenejme, že uvedená definice $\iota$-spojitosti je ekvivalentní stejnoměrné spojitosti $f$ v $I$ (a tedy obecně plyne ze spojitosti v případě kompaktního $I = [a, b]$). Pojem $\iota$-primitivní funkce je ekvivalentní obvyklému pojmu primitivní funkce. Viz například [1, Theorem 7.7.1] a [1, Theorem 8.1.1].

Důkaz (již samotná přesná formulace) naznačených ekvivalencí by však vyžadoval především přesné definování hyperreálných čísel ${}^*\mathbb{R}$ a jejich důsledné odlišování od „obyčejných“ reálných čísel $\mathbb{R}$. Podobně bychom museli odlišovat, že jednou hovoříme o funkci $f(x)$ v $[a, b]$ a podruhé o její hyperreálné variantě ${}^*f$, která je definovaná v ${}^*[a, b]$ tj. v (hyper)intervalu všech hyperreálných čísel mezi $a$ a $b$.

Upozorníme zde však na jiná možná úskalí. Je zřejmé, že definice nekonečně jemného dělení vyžaduje, aby počet dělicích bodů $N$ byl nekonečně velký (pokud tedy $a$ není nekonečně blízko $b$). Operujeme zde tedy s nekonečným součtem, a v důkaze Lemmatu 3.1 potřebujeme volit největší hodnotu $\epsilon$ z nekonečné množiny $\{\epsilon_j; j = 1, \dots N\}$. Z klasické analýzy víme, že se jedná o potenciálně problematické postupy.

Odpověď (pro níž bychom právě potřebovali do větší hloubky NSA) zní, že množina indexů $j = 1, \dots, N$ není nekonečná, nýbrž hyperkonečná. Hyperkonečné množiny se formálně chovají zcela stejně jako množiny konečné (lze přes ně sčítat, nacházet největší/nejmenší prvek, atd.)

Ne vše ve světě hyperreálných čísel funguje způsobem, na který jsme zvyklí. Například množina všech nekonečně velkých přirozených čísel nemá nejmenší prvek: takové číslo by muselo být buď konečné, nebo nekonečně velké, a obojí vede ke sporu. To odporuje principu tzv. dobrého uspořádání, dle něhož každá podmnožina přirozených čísel má nejmenší prvek. Princip dobrého uspořádání je, jak známo, ekvivalentní principu indukce. Znamená to tedy, že princip indukce neplatí ve světě nekonečně velkých přirozených čísel? Do jisté tomu tak je: číslo 1 jistě není nekonečně velké, a pokud $n$ není nekonečně velké, tak ani $n + 1$ není nekonečně velké. Takto jsme indukcí dokázali, že všechna přirozená čísla jsou konečná; tedy nekonečně velká přirozená čísla neexistují.

Všimněme si podobně, že množina všech nekonečně malých reálných čísel nemá nejen největší prvek, ale ani (v obvyklém smyslu) supremum: opět na základě úvahy, že toto supremum samo buď je, nebo není nekonečně malé, což obojí vede ke sporu.

Uvedené paradoxy mají uspokojivé řešení: princip indukce resp. axiom suprema platí pro všechny ,,pěkné" (tzv. internální) množiny. Cena, kterou platíme za přijetí existence nekonečně malých a velkých čísel je však i existence neobvyklých (tzv. externálních) množin, které se mohou chovat neočekávaně.

**Existence nekonečně malých čísel.** V moderní matematické praxi je ,,existence" terminus technicus – existuje to, co je přímo postulováno axiomy teorie množin, a dále to, k čemu lze dospět přesně vymezenými postupy. Tak se obvykle přijímá existence prázdné množiny $\emptyset$ a množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$; mezi povolené postupy patří obvyklé operace sjednocení a průniku. Máme však k dispozici i mnohem silnější axiom potence a axiom výběru.
Posuneme-li se od otázky formální axiomatizace na poněkud filosofičtější rovinu problému, lze si všimnout, že otázka existence určitého matematického objektu má smysl jen v rámci určité větší struktury. Nemá smysl klást si otázku, zda a jakým způsobem existuje např. číslo "7"samo o sobě, tj. bez kontextu axiomů aritmetiky.
Existence matematických objektů se dále zdá být úzce spjata s principem sporu. Je-li určitý systém axiómů bezesporný, lze vždy alespoň v principu konstruovat jeho model, tj. určitou abstraktní strukturu, která tyto axiomy splňuje. Na druhou stranu důkaz neexistence se v matematice provádí pouze a výlučně sporem.
Také se lze na věc dívat tak, že určitá třída objektů je k existenci takříkajíc vynucena potřebou používat určité operace. Tak odčítání vede od přirozených čísel k číslům záporným, dělení k číslům racionálním; reálná čísla lze chápat (a to i v přesném slova smyslu) za zúplnění, završení číselné osy s ohledem na příslušné uspořádání. V naznačeném duchu pak $\mathbb{Q}$ reprezentujeme jako množinu formálních podílů čísel z $\mathbb{N}$, množinu $\mathbb{R}$ jako systém dolních množin (,,řezů") čísel z $\mathbb{Q}$, atd.

Ohledně existence nekonečně malých čísel lze říci, že se zdají být vynucena základní operací analýzy, tj. pojmem limity. Nestandardní analýzu lze chápat jako jisté zúplnění obvyklé reálné analýzy [3, Chapter 4]. Hyperreálná čísla lze také reprezentovat pomocí reálných čísel, přesněji řečeno pomocí posloupností reálných čísel. Původní čísla jsou modelována konstantními posloupnostmi; nekonečně malé číslo je reprezentováno posloupností kladných čísel, která se blíží do nuly. Na uvedeném modelu je zřejmé, že zachovává aritmetickou strukturu; daleko méně triviální je způsob, jak zachovat například (linearitu) uspořádání. To lze učinit pomocí tzv. ultrafiltrů. V podrobnostech odkazujeme kupř. na [1, Chapter 3]. Jen poznamenejme, že existence ultrafiltrů plyne z axiomu výběru; fakticky jde o striktně slabší axiom.

Existenci nekonečně velkých a malých čísel se zdá nasvědčovat i zmiňovaný princip sporu. Představme si systém axiomů (*PA), který vznikne tak, že k obvyklým axiomům Peanovy aritmetiky (PA) připojíme dodatečný seznam axiomů

$$1 < N < \infty \tag{$I_1$}$$
$$2 < N < \infty \tag{$I_2$}$$
$$3 < N < \infty \tag{$I_3$}$$
$$\vdots$$

**Tvrzení.** Pokud (PA) neobsahuje spor, pak ani (*PA) neobsahuje spor.

*Důkaz.* Mějme důkaz sporu v (*PA). Ovšem každý důkaz je konečný, a tedy obsahuje jen konečný počet dodatečných axiomů $I_1$ až $I_n$. Těm však lze jistě vyhovět (volbou např. $N = n + 1$); nemohou tedy obsahovat spor. □

Uvedená úvaha (nazývaná též *princip kompaktnosti*) vlastně říká, že z bezespornosti (PA) plyne i bezespornost (*PA). Formulováno ještě jinak: z existence libovolně velkých přirozených čísel v jistém smyslu logicky vyplývá i existence nekonečně velkých přirozených čísel.

**Závěr.** Je nepochybné, že analýza se zabývá nekonečnem ve smyslu velikosti a malosti. Totéž zde lze říci více způsoby, jež jsou z logického hlediska naprosto ekvivalentní: *limitu* lze definovat pomocí $\varepsilon$-$\delta$ formule, abstraktněji pomocí okolí, pouze pomocí spočetných posloupností (Heineho definice) a konečně lze také postulovat univerzum hyperreálných čísel $^*\mathbb{R}$ a pracovat tak s nekonečně velkými a malými čísly výslovně.
Vzdor očekáváním se NSA nestala mainstreamovým přístupem; snad jí, řečeno současným žargonem, stále schází její ,,killer app". Svým způsobem vyjadřování je jistě nejblíže způsobu, jak analýzu provozujeme intuitivním či heuristickým způsobem; to ji však zřejmě nečiní tím nejlepším možným kandidátem na rigorózní teorii. Explicitní zavedení infinitezimálních veličin má ten nepříjemný důsledek, že se částečně musíme zříci principu indukce i axiomu suprema; tj. právě dvou hlavních nástrojů, s nimiž nekonečno obvykle krotíme.
Naopak ze strany skalních příznivců NSA často vysmívaný $\varepsilon$-$\delta$ jazyk si zachovává jisté kouzlo elementárního či rukodělného přístupu. Snad není náhodou, že se vyvinul s paralelně s potřebou předložit analýzu mnohem širšímu, mj. technicko-přírodovědnému posluchačstvu [2]. V základních kurzech analýzy, kde je cílem postupovat co možná rychle a přesně – a nikoliv příliš daleko – zůstane snad navždy první volbou; stejně tak je ale dobré si občas připomenout, že existují i jiné přístupy.

## Literatura


[1] Robert Goldblatt. *Lectures on the hyperreals*, volume 188 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998. An introduction to nonstandard analysis.

[2] Judith V. Grabiner. Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *Amer. Math. Monthly*, 90(3):185–194, 1983.

[3] Terence Tao. *Compactness and contradiction.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.