Náhodné procesy II

Zuzana Prášková[1]

[1]Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Univerzita Karlova v Praze
email: praskova@karlin.mff.cuni.cz

25. a 26. 2. 2010

Základní literatura:

Z. Prášková: Základy náhodných procesů II, Karolinum 2006

Rozšiřující literatura:

Brockwell, P. J., Davis, R. A.: Time Series: Theory and Methods. Springer-Verlag, New York 1991

Anděl, J.: Statistická analýza časových řad. SNTL, Praha 1976

Definice a základní charakteristiky

Definice:

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálných náhodných veličin $\{X_t,\ t \in T\}$ definovaných na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ se nazývá náhodný proces.

Poznámka:

$T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$ - proces s diskrétním časem, časová řada

$T = [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ - $\{X_t,\ t \in T\}$ je proces se spojitým časem.

Definice:

Dvojice $(S, \mathcal{E})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{E}$ je $\sigma-$algebra podmnožin S, se nazývá stavový prostor procesu $\{X_t,\ t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o proces s diskrétními stavy, nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o procesu se spojitými stavy.

Definice:

Reálný stochastický proces $\{X_t,\ t \in T\}$ se nazývá měřitelný, jestliže zobrazení $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T-$měřitelné, kde $\mathcal{B}_T$ je $\sigma-$algebra borelovských podmnožin T a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$ značí součinovou $\sigma-$algebru.

konečně-rozměrná rozdělení:

$\forall n \in \mathbb{N}_0$ a každé konečné podmnožině $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ lze přiřadit systém náhodných veličin $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$, které mají sdružené rozdělení s distribuční funkcí

$$\mathrm{P}\left[X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n\right] = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

pro všechna $x_1, \dots, x_n$.

Systém distribučních funkcí se nazývá konzistentní, jestliže platí

- $F_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n)$ pro každou permutaci $(i_1, \dots, i_n)$ z $(1, \dots, n)$.
- $\lim_{x_n \to \infty} F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1,\dots,t_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Systém **charakteristických funkcí** odpovídající $F_{t_1,\dots,t_n}$: Je-li $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ náhodný vektor, pak charakteristická funkce má tvar

$$\varphi(\mathbf{u}) := \mathrm{E}e^{\mathrm{i}\mathbf{u}^\top \mathbf{X}} = \mathrm{E}e^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^n u_j X_j}, \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n).$$

- $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(u_1, \dots, u_n)$,
- symetrie:
$$\varphi(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) = \varphi(u_1, \dots, u_n)$$
pro lib. permutaci $(i_1, \dots, i_n)$ z $(1, \dots, n)$,
- konzistence:
$$\lim_{u_n \to 0} \varphi_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{X_{t_1},\dots,X_{t_{n-1}}}(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Daniel-Kolmogorovova věta

Ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí. Naopak platí

Věta 0:

Nechť $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Potom existuje náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná $t_1,\dots,t_n \in T$ a libovolná reálná $x_1,\dots,x_n$ platí

$$\mathrm{P}\left[X_{t_1} \leq x_1,\dots,X_{t_n} \leq x_n\right] = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n).$$

Důkaz: Štěpán (1987), věta I.10.3.

Definice:

Komplexní náhodná veličina X se definuje jako $X = Y + iZ$, kde Y a Z jsou reálné náhodné veličiny.

Pokud existují střední hodnoty $\mathrm{E}Y$ a $\mathrm{E}Z$, definujeme střední hodnotu komplexní náhodné veličiny X jako

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y + i\mathrm{E}Z.$$

Existují-li druhé momenty náhodných veličin Y a Z, definujeme rozptyl náhodné veličiny X jako

$$\operatorname{var} X := \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}X)(\overline{X} - \overline{\mathrm{E}X})\right] = \mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|^2,$$

což je vždy nezáporné číslo.

Definice:

Komplexní náhodný proces je definován jako rodina komplexních náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

Definice:

Nechť $\{X_t,\ t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathrm{E}X_t$. Potom funkce $\mu_t = \mathrm{E}X_t$ definovaná na T se nazývá střední hodnota procesu $\{X_t,\ t \in T\}$. Proces, jehož střední hodnota je identicky rovna nule, se nazývá centrovaný.

Definice:

Jestliže $\{X_t,\ t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty, tj. $\mathrm{E}|X_t|^2 < \infty$, $\forall t \in T$, potom (obecně komplexní) funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$ předpisem

$$R(s,t) = \mathrm{E}\left[(X_s - \mu_s)(\overline{X}_t - \overline{\mu}_t)\right]$$

se nazývá autokovarianční funkce procesu $\{X_t,\ t \in T\}$. Hodnota $R(t,t)$ se nazývá rozptyl procesu v čase t.

Definice:

Autokorelační funkce procesu $\{X_t,\ t \in T\}$ s kladnými rozptyly je definována jako

$$r(s,t) = \frac{R(s,t)}{\sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}}, \quad s,t \in T.$$

Definice:

Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ se nazývá gaussovský (normální), jsou-li všechna jeho konečněrozměrná rozdělení normální, tj. jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \dots, t_n \in T$ má vektor $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^\top$ $n-$rozměrné normální rozdělení $\mathcal{N}_n(\mathbf{m_t}, \mathbf{V_t})$, kde $\mathbf{m_t} = (\mathrm{E}X_{t_1}, \dots, \mathrm{E}X_{t_n})^\top$ a

$$\mathbf{V_t} = \begin{pmatrix} \mathrm{var} X_{t_1} & \mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) & \dots & \mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_n}) \\ \mathrm{cov}(X_{t_2}, X_{t_1}) & \mathrm{var} X_{t_2} & \dots & \mathrm{cov}(X_{t_2}, X_{t_n}) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathrm{cov}(X_{t_n}, X_{t_1}) & \mathrm{cov}(X_{t_n}, X_{t_2}) & \dots & \mathrm{var} X_{t_n} \end{pmatrix}.$$

Definice:

Řekneme, že náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je striktně stacionární, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná $x_1, \dots, x_n$ a pro libovolná $t_1, \dots, t_n$ a h taková, že $t_k \in T, t_k + h \in T, 1 \leq k \leq n$, platí

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1, \dots, x_n).$$

Definice:

Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ s konečnými druhými momenty se nazývá slabě stacionární, má-li konstantní střední hodnotu $\mu_t = \mu,\ \forall t \in T$ a je-li jeho autokovarianční funkce $R(s,t)$ funkcí pouze $s - t$. Je-li splněna pouze podmínka na autokovarianční funkci, mluvíme o kovarianční stacionaritě.

Autokovarianční funkce slabě stacionárních procesů:

$$R(t) := R(t, 0),\ t \in T,$$

(funkce jedné proměnné).

Rozptyl stacionárního procesu : $\operatorname{var} X_t = R(t - t) = R(0)$

Autokorelační funkce je potom dána předpisem

$$r(t) = \frac{R(t)}{R(0)}.$$

Věta 1:

Striktně stacionární náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ s konečnými druhými momenty je i slabě stacionární.

Důkaz:

$\{X_t,\ t \in T\}$ striktně stacionární $\Rightarrow$ X_t mají pro všechna $t \in T$ stejné rozdělení a tedy stejnou konečnou střední hodnotu

$$\mathrm{E}X_t = \mathrm{E}X_{t+h},\ \forall t \in T,\ \forall h :\ t + h \in T$$

$$\text{speciálně pro } h = -t :\ \mathrm{E}X_t = \mathrm{E}X_0 = \text{konst}$$

Důkaz Věty 1, pokr.

Podobně (X_t, X_s) a (X_{t+h}, X_{s+h}) mají stejné sdružené rozdělení a tedy

$$\mathrm{E}\,[X_t\,X_s] = \mathrm{E}\,[X_{t+h}\,X_{s+h}]\ \forall s,t \in T,\ \forall h:\ s+h \in T,\ t+h \in T$$

speciálně pro $h = -t : \mathrm{E}\,[X_t X_s] = \mathrm{E}\,[X_0 X_{s-t}]$
je funkce $s - t$. $\square$

Příklad:

$\{X_t,\ t \in T\}$ posloupnost iid náhodných veličin s distribuční funkcí F

$$
\begin{aligned}
F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) &= \mathrm{P}\left[X_{t_1} \le x_1,\ldots,X_{t_n} \le x_n\right] = \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left[X_{t_i} \le x_i\right] = \prod_{i=1}^{n} F(x_i), \\
F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x_1,\ldots,x_n) &= \mathrm{P}\left[X_{t_1+h} \le x_1,\ldots,X_{t_n+h} \le x_n\right] = \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left[X_{t_i+h} \le x_i\right] = \prod_{i=1}^{n} F(x_i),
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \{X_t,\ t \in T\}$ je striktně stacionární.

Příklad:

Posloupnost $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem

$$X_t = (-1)^t X,$$

kde X je náhodná veličina:

$$X = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{s pravděpodobností } \frac{3}{4}, \\ \frac{3}{4} & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{4}. \end{cases}.$$

Pak $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ je slabě stacionární, neboť

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_t &= 0, \\ \operatorname{var} X_t &= \sigma^2 = \frac{3}{16}, \\ R(s,t) &= \sigma^2(-1)^{s+t} = \sigma^2(-1)^{s-t}, \end{aligned}$$

ale není striktně stacionární (veličiny X a $-X$ mají různé rozdělení).

Věta 2:

Slabě stacionární gaussovský proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je i striktně stacionární.

Důkaz:

Ze slabé stacionarity procesu $\{X_t, t \in T\}$ plyne

$\mathrm{E}X_t = \mu,\ \operatorname{cov}(X_t, X_s) = R(t-s) = \operatorname{cov}(X_{t+h}, X_{s+h}), t, s \in T,$

tedy

$$\mathrm{E}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \boldsymbol{\mu} = (\mu, \dots, \mu) = \mathrm{E}(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

$$\operatorname{var}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{var}(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} R(0) & R(t_2 - t_1) & \dots & R(t_n - t_1) \\ R(t_2 - t_1) & R(0) & \dots & R(t_n - t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \dots & R(0) \end{pmatrix}.$$

Protože normální rozdělení je určeno jednoznačně vektorem středních hodnot a varianční maticí, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, a $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \Rightarrow \{X_t,\ t \in T\}$ je striktně stacionární. $\square$

Základní vlastnosti autokovarianční funkce.

Věta 3:

Nechť $\{X_t,\ t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty. Potom pro jeho autokovarianční funkci platí

$$R(t,t) \geq 0,$$
$$|R(s,t)| \leq \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}.$$

Důkaz:

První vlastnost je vlastnost rozptylu. Druhá vlastnost plyne ze Schwarzovy nerovnosti, neboť

$$|R(s,t)| = |\mathrm{E}(X_s - \mathrm{E}X_s)(\overline{X_t} - \overline{\mathrm{E}X_t})| \leq \mathrm{E}|(X_s - \mathrm{E}X_s)(\overline{X_t} - \overline{\mathrm{E}X_t})|$$
$$\leq (\mathrm{E}|X_s - \mathrm{E}X_s|^2)^{\frac{1}{2}}(\mathrm{E}|X_t - \mathrm{E}X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}$$

$\square$

Pro slabě stacionární proces je tedy $R(0) \geq 0$ a $|R(t)| \leq R(0)$.

Definice:

Nechť $f(s,t)$ je obecně komplexní funkce definovaná na $T \times T$, $T \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f je pozitivně semidefinitní, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$, libovolná komplexní čísla $c_1, \dots, c_n$ a libovolné body $t_1, \dots, t_n \in T$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(t_j, t_k) \geq 0.$$

Říkáme, že komplexní funkce g jedné proměnné na T je pozitivně semidefinitní, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$, libovolná komplexní čísla $c_1, \dots, c_n$ a libovolné body $t_1, \dots, t_n \in T$, takové že $t_j - t_k \in T$, platí

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} g(t_j - t_k) \geq 0.$$

Definice:

Řekneme, že komplexní funkce f na $T \times T$ je hermitovsky symetrická, jestliže $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$ $\forall s,t \in T$. Komplexní funkce g jedné proměnné se nazývá hermitovsky symetrická, když $\forall t \in T$ je $g(-t) = \overline{g(t)}$.

Věta 4:

Pozitivně semidefinitní funkce je i hermitovsky symetrická.

Důkaz:

V definici pozitivní semidefinitnosti pro $n = 1$ stačí zvolit $c_1 = 1$; pro $n = 2$ stačí zvolit $c_1 = 1, c_2 = 1$ a dále $c_1 = 1, c_2 = i (= \sqrt{-1})$. □

Poznámka:

Reálná funkce f dvou proměnných na $T \times T$, která je pozitivně semidefinitní, je symetrická, tj. $f(s,t) = f(t,s)$ pro všechny body $s,t \in T$. Pro reálnou funkci g jedné proměnné na T z pozitivní semidefinitnosti plyne $g(t) = g(-t)$ pro každé $t \in T$.

Věta 5:

Nechť $\{X_t,\ t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty. Potom jeho autokovarianční funkce je pozitivně semidefinitní na $T \times T$.

Důkaz:

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že proces je centrovaný. Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$, komplexní konstanty $c_1, \dots, c_n$ a body $t_1, \dots, t_n \in T$ platí

$$0 \le \mathrm{E}\left|\sum_{j=1}^{n} c_j X_{t_j}\right|^2 = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n} c_j X_{t_j} \overline{\sum_{k=1}^{n} c_k X_{t_k}}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \mathrm{E}(X_{t_j}\overline{X_{t_k}}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} R(t_j, t_k).$$

$\square$

Věta 6:

Ke každé pozitivně semidefinitní funkci R na $T \times T$ existuje náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ s konečnými druhými momenty takový, že R je jeho autokovarianční funkcí.

Důkaz:

Větu dokážeme pouze pro reálnou funkci R. Důkaz pro obecnou pozitivně semidefinitní funkci lze nalézt např. v Loève (1955), kap. X, odst. 34.

Z pozitivní semidefinitnosti funkce R plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $t_1, \ldots, t_n \in T$ je matice

$$\mathbf{V_t} = \begin{pmatrix} R(t_1, t_1) & R(t_1, t_2) & \ldots & R(t_1, t_n) \\ R(t_2, t_1) & R(t_2, t_2) & \ldots & R(t_2, t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R(t_n, t_1) & R(t_n, t_2) & \ldots & R(t_n, t_n) \end{pmatrix}$$

pozitivně semidefinitní.

Důkaz Věty 6, pokr.

Funkce

$$\varphi(\mathbf{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \mathbf{V_t}\mathbf{u}\right\}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

je charakteristickou funkcí normálního rozdělení $\mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{V_t})$. $\forall n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $t_1, \ldots, t_n \in T$ takto vytvoříme systém charakteristických funkcí, jemuž odpovídá systém normálních distribučních funkcí, který je konzistentní. Tudíž podle Daniellovy-Kolmogorovovy věty existuje gaussovský náhodný proces, jehož všechny vzájemné kovariance jsou určeny hodnotami funkce $R(s, t)$; funkce R je tedy jeho autokovarianční funkce. $\square$

Příklad:

Zjistěte, zda je funkce $\cos t$, $t \in T = (-\infty, \infty)$ autokovarianční funkcí nějakého náhodného procesu.

Řešení:

Stačí ověřit, že funkce $\cos t$ je pozitivně semidefinitní. Nechť je $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ a $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \bar{c}_k \cos(t_j - t_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \bar{c}_k (\cos t_j \cos t_k + \sin t_j \sin t_k)$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} c_j \cos t_j \right|^2 + \left| \sum_{k=1}^{n} c_k \sin t_k \right|^2 \geq 0.$$

Funkce $\cos t$ je tedy pozitivně semidefinitní, a proto podle věty 6 existuje (gaussovský) náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$, jehož autokovarianční funkce je $R(s,t) = \cos(s-t)$.

Věta 7:

Součet dvou pozitivně semidefinitních funkcí je pozitivně semidefinitní funkce.

Důkaz:

Tvrzení plyne z definice pozitivně semidefinitní funkce, neboť jsou-li funkce f a g pozitivně semidefinitní a $h = f + g$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, komplexní konstanty $c_1, \dots, c_n$ a body $t_1, \dots, t_n \in T$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c}_k h(t_j, t_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c}_k [f(t_j, t_k) + g(t_j, t_k)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c}_k f(t_j, t_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c}_k g(t_j, t_k) \geq 0.$$

$\square$

Důsledek:

Součet dvou autokovariančních funkcí je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu s konečnými druhými momenty.

Důkaz:

Tvrzení je jednoduchým důsledkem vět 5, 6 a 7. □

Věta 8:

Reálná část autokovarianční funkce je také autokovarianční funkcí. Imaginární část je autokovarianční funkcí jen tehdy, je-li identicky rovná nule.

Důkaz:

Bez újmy na obecnosti dokážeme tvrzení jen pro centrované procesy. Je-li $X_t = Y_t + iZ_t$ komplexní proces s nulovou střední hodnotou, pak $\mathrm{E}Y_t = \mathrm{E}Z_t = 0$ a
$R(s,t) = \mathrm{E}X_s\overline{X}_t = \mathrm{E}\left[(Y_s + iZ_s)(Y_t - iZ_t)\right] =$
$\mathrm{E}Y_sY_t + \mathrm{E}Z_sZ_t + i(\mathrm{E}Z_sY_t - \mathrm{E}Y_sZ_t)$. Reálná část je autokovarianční funkcí podle předchozího důsledku. Protože pro $s = t$ je imaginární část nulová, platí i druhé tvrzení. □

Některé důležité třídy náhodných procesů

Markovovy procesy

Definice:
Řekneme, že proces $\{X_t, \ t \in T\}$ je Markovův proces se stavovým prostorem $(S, \mathcal{E})$, jestliže pro libovolné $t_0, t_1, \dots, t_n, \ 0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, platí

$$P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_0}) = P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}) \ \text{ s. j.} \qquad (1)$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnost (1) se nazývá markovská vlastnost. Jednoduchými případy jsou Markovovy procesy s diskrétními stavy, neboli Markovovy řetězce s diskrétním a spojitým časem.

Příklad:

Markovův řetězec $\{X_t,\ t \geq 0\}$ s množinou stavů $S = \{0, 1\}$, s počátečním rozdělením $P(X_0 = 0) = 1, P(X_0 = 1) = 0$ a maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0$$

Zkoumejme stacionaritu tohoto procesu.

Víme:

$$\mathbf{p}(t)^T = \mathbf{p}(0)^T \mathbf{P}(t) = (1, 0)\mathbf{P}(t) = (p_{00}(t), p_{01}(t))$$

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Příklad, pokr.

Nyní máme vzhledem k počátečnímu rozdělení

$$\mathrm{P}(X_t = 1) = p_{01}(t) = \mathrm{E}X_t = \frac{1}{\alpha+\beta} \cdot \left(\alpha - \alpha \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\right),$$

což závisí na t, proces tedy není striktně, ani slabě stacionární.

Pokud ale počáteční rozdělení je stacionární rozdělení daného Markovova řetězce, potom $\{X_t,\ t \geq 0\}$ je striktně stacionární proces se střední hodnotou $\mathrm{E}X_t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ a autokovarianční funkcí

$$R(s,t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)|s-t|}.$$

Je tedy i slabě stacionární.

Příklad, pokr.

Důk.

stacionární rozdělení: $\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}(t)$

lze řešit jako $\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T$

$\pi_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

ze stacionarity: $\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\pi} \Rightarrow \mathrm{E}X_t = \mathsf{P}(X_t = 1) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$

pro $t < s$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_t X_s) &= 1 \cdot P(X_t = 1, X_s = 1) \\ &= P(X_s = 1 | X_t = 1) P(X_t = 1) \\ &= p_{11}(s-t) P(X_t = 1) \end{aligned}$$

Procesy s nezávislými přírůstky

Definice:

Řekneme, že proces $\{X_t,\ t \in T\}$, kde T je interval, má nezávislé přírůstky, jestliže pro každé $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ s vlastností $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ jsou náhodné veličiny $X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.

Jestliže pro každé $s, t \in T$, $s < t$, rozdělení přírůstků $X_t - X_s$ závisí pouze na $t - s$, řekneme, že proces $\{X_t,\ t \in T\}$ má stacionární přírůstky.

Př. *Poissonův proces* s intenzitou λ je Markovův řetězec $\{X_t,\ t \geq 0\}$ se spojitým časem takový, že $X_0 = 0$ s. j. a pro $t > 0$ mají náhodné veličiny X_t Poissonovo rozdělení s parametrem λt. Přírůstky $X_t - X_s$ pro $s < t$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t - s)$. Není stacionární ani ve striktním, ani v slabém smyslu.

Wienerův proces (někdy též nazývaný proces *Brownova pohybu)*. Je definován jako gaussovský náhodný proces $\{W_t, t \geq 0\}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $W_0 = 0$ s. j. a $\{W_t, t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.
2. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ jsou přírůstky $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny.
3. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t < s$ mají přírůstky $W_s - W_t$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(s-t)$, kde σ^2 je kladná konstanta. Speciálně, pro každé $t \geq 0$ je $\mathrm{E}W_t = 0$ a $\mathrm{var}\, W_t = \sigma^2 t$.

Jak je vidět, ani Wienerův proces není stacionární ve smyslu výše uvedených definic stacionarity.