

Ústní otázky ke zkoušce z PDR II

Každý dostane jednu otázku z části prostory funkcí a jednu otázku z části nelineární rovnice. Navíc dostane jednu rovnici, u které bude muset splnit to, co bude napsáno (typicky dokázat existenci či jednoznačnost tak, ze se odkáže na příslušnou větu a ověří její předpoklady). Půjde o rovnice eliptické, nelineární, součástí zadání úlohy bude typicky i nějaká nápověda. Tyto úlohy nebudou dopředu zveřejněny.

Část I: Prostory funkcí

1. Definice Sobolevových prostorů, regularizátor, Věta o lokální aproximaci a její důsledky
2. Skládání sobolevovských funkcí a lipschitzovských funkcí, důsledky
3. Věta o globální aproximaci sobolevovských funkcí pomocí $C^\infty(\bar{\Omega})$ funkcí včetně důkazu; je třeba uvést definici oblasti se spojitou hranicí, není třeba dokazovat rozklad jednotky
4. Vztahy mezi slabou derivací a diferencemi, včetně důkazů
5. Definice oblasti s $C^{k,\mu}$ -hranicí; lokální narovnání hranice, ekvivalence norem
6. Definice oblasti s $C^{k,\mu}$ -hranicí; věta o rozšíření sobolevovských funkcí
7. Věty o spojitém vnoření Sobolevových prostorů do Lebesgueových, včetně důkazu; pomocné výsledky stačí jen uvést
8. Věty o spojitém vnoření Sobolevových prostorů do prostorů hölderovskými spojitých funkcí, včetně důkazu; pomocné výsledky stačí jen uvést
9. Věty o kompaktním vnoření Sobolevových prostorů: přehled výsledků, důkazy (není třeba dokazovat Kolmogorovo kritérium kompaktnosti)
10. Stopy sobolevovských funkcí: vysvětlení zavedení hodnot na hranici, výsledky, důkazy
11. Věty o kompaktnosti operátoru stop: přehled výsledků, důkazy (pomocné výsledky stačí uvést)

12. Důsledky vět o stopách (integrace per partes, ekvivalentní charakterizace prostoru $W_0^{1,p}(\Omega)$)
13. Beppo Leviho prostory (definice, ekvivalence se sobolevovskými funkcemi)
14. Bochnerův integrál: zavedení, Pettisova věta (bez důkazu, jen vysvětlit pojmy), Bochnerova věta (i důkaz), Fubiniho věta (bez důkazu), základní důsledky těchto vět
15. Prostory $L^p(I; X)$: zavedení, vlastnosti a důkaz separability a Věty o Lebesgueových bodech, bez důkazu duální prostory, reflexivita
16. Prostory $W^{1,p}(I; X)$: definice časové derivace, zavedení prostorů, základní vlastnosti, ekvivalentní charakterizace, vnoření do spojitých funkcí s hodnotami v X
17. Gelfandova trojice: definice, zobecnění definice časové derivace, důkaz věty o spojitosti (včetně potřebných pomocných výsledků)
18. Kompaktnost pro Bochnerovy prostory (Ehrlingovo lemma, Aubin–Lionsova věta)

Část II: Nelineární rovnice

1. Nelineární verze Lax–Milgramovy věty (formulace, důkaz), aplikace na nelineární okrajovou úlohu pro PDR eliptického typu
2. Němytského operátor (jen formulace věty), Browerova věta o pevném bodu (jen důsledek, bez důkazu), existence řešení pro okrajovou úlohu pro eliptickou PDR s monotónním operátorem
3. Věty o pevném bodu: formulace (Banach, Brower, Schauder, Schaeffer), důkaz Schauderovy věty a jeho důsledku (Schaefferovy věty)
4. Nulový lagrangián: definice, vlastnosti, ukázat, že determinant je nulový lagrangián
5. Důkaz Browerovy věty a pomocí věty o nulovém lagrangianu; důkaz důsledku Browerovy věty potřebném k důkazu věty o monotónních operátorech

6. Formulace minimalizace funkcionálu vyjádřeného lagrangiánem; základní věta variačního počtu (formulace, důkaz); existence a jednoznačnost minimizéru pro úlohy pro funkcionály vyjádřené lagrangiánem, vztah s konvexitou
7. Formulace minimalizace funkcionálu vyjádřeného lagrangiánem; základní věta variačního počtu (formulace), souvislost Euler–Lagrangeovy rovnice a minima funkcionálu pro skalární a vektorový případ; polykonvexní funkcionál, jeho slabá zdola polospojitosť
8. Definice semigrupy, generátor semigrupy, základní vlastnosti (lemmata před Hille–Yosidovou větou včetně důkazu)
9. Definice semigrupy, generátor semigrupy, základní vlastnosti (lemmata před Hille–Yosidovou větou bez důkazu), Hille–Yosidova věta (včetně důkazu)
10. Definice semigrupy, generátor semigrupy, Hille–Yosidova věta (formulace), aplikace na lineární parabolickou a hyperbolickou rovnici
11. Uvažujte rovnici

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\
 \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{on } (0, T) \times \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

Definujte slabé řešení, formulujte větu o existenci řešení, galerkinovskou aproximaci, dokažte její (globální v čase) řešitelnost a apriorní odhady

12. Uvažujte rovnici

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} && \text{in } (0, T) \times \Omega, \\
 \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega, \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{on } (0, T) \times \partial\Omega.
 \end{aligned}$$

Definujte slabé řešení, formulujte větu o existenci řešení, galerkinovskou aproximaci, pomocí apriorních odhadů (není třeba dokazovat) proveďte limitní přechod a dokažte existence slabého řešení splňující energetickou nerovnost

13. Uvažujte parabolickou rovnici s monotónním operátorem: definujte slabé řešení, formulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení, dokažte jednoznačnost a vysvětlete Rotheho metodu
14. Uvažujte parabolickou rovnici s monotónním operátorem: definujte slabé řešení, formulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení, vysvětlete aproximace, dokažte apriorní odhady včetně odhadu časových derivací
15. Uvažujte parabolickou rovnici s monotónním operátorem: definujte slabé řešení, formulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení, vysvětlete aproximace, použitím apriorních odhadů (není třeba dokazovat) proveďte limitní přechod a dokažte existenci řešení