(1) Rozviňte do Fourierovy řady

(10b) $f(x) = x\sin x$ na $(-\pi,\pi)$.

Vyšetřete bodovou/stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci na $[-\pi,\pi]$ resp. $(-\pi,\pi)$.

Řešení

$x\sin x$ je sudá funkce. Proto $b_k = 0$ $k \in \mathbb{N}$. 1b 1b

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underset{u\ v'}{x\sin x}\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\cos x\,dx}_{0}\right)$$

1b

$$= 2$$

$k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{2}\left(\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos(k+1)x}{(k+1)} + x\frac{\cos(k-1)x}{(k-1)}\right]_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos(k+1)x}{k+1} - \frac{\cos(k-1)x}{(k-1)}\right)dx}_{=0}$$ 2b

$$= (-1)^k\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2-1} \qquad k \neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2x\,dx}_{=0}\right) = \underline{-\frac{1}{2}} \qquad k=1$$ 1b

F. řada: $$\underline{1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2-1}\cos(kx)}$$ 1b

Bodová konvergence: na $\mathbb{R}$ k $x\sin x$ 2π-periodicky rozšířené na $\mathbb{R}$ z $[-\pi,\pi]$ 1

Konvergence je stejnoměrná 2

($x\sin x$ po per. rozšíření je spojitá na $\mathbb{R}$ a na části spojitě dif.) .

② Pomocí reziduové věty spočtěte

17

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(1+x^2)}\,dx$$

Řešení

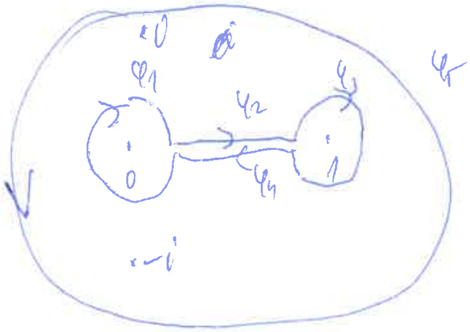
Jde o integrál typu $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,dx$, 2b

kde $\alpha=\frac{1}{2}$ $\quad f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

1b $\quad F(z)=\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1+z^2}$

Integrační cesta (po zjednodušení)

2b



$\varphi_1(t)=\varepsilon e^{it}$ $\quad t\in(-\pi,0)$

$\varphi_2(t)=t$ $\quad t\in[\varepsilon,1-\varepsilon]$

$\varphi_3(t)=\varepsilon e^{it}$ $\quad t\in[-\pi,\pi]$

$\varphi_4(t)=t$ $\quad t\in[1-\varepsilon,\varepsilon]$ 2b

$\varphi_5(t)=Re^{it}$ $\quad t\in[0,2\pi)$

$$\int_{\varphi_1\oplus\cdots\oplus\varphi_5}\frac{z^{1/2}(1-z)^{-\frac{1}{2}}}{(1+z^2)}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_i+\mathrm{Res}_{-i}\right)\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^{1/2}\frac{1}{1+z^2}\right)$$ 1b

$\sim\varepsilon$ $\quad \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

$\int_{\varphi_1},\ \int_{\varphi_3}\ \underset{\varepsilon\to0}{\to 0}$ 2b

1b $\int_{\varphi_2}\to I$

$\int_{\varphi_4}\to -e^{i\pi}I=I$ $\quad \operatorname{Arg}\frac{z}{1-z}\to$ (skok o 2π nahoře / zdola) 1b

$$\int_{\varphi_5}\to 2\pi i\,(-1)^{\frac{1}{2}}\lim_{z\to\infty}\frac{z}{1+z^2}=0$$ 1b

Tedy $\quad 2I = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_i+\mathrm{Res}_{-i}\right)\left(\left(\frac{z}{1-z}\right)^{1/2}\frac{1}{1+z^2}\right)$ 1b

$$=2\pi i\,\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{i}{1-i}\right)^{1/2}-\left(\frac{-i}{1+i}\right)^{1/2}\right)=$$

$$=\pi\left(\left(\frac{i(1+i)}{2}\right)^{1/2}-\left(\frac{-i(1-i)}{2}\right)^{1/2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left((i-1)^{1/2}-(-i-1)^{1/2}\right)$$ 1b

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)^{1/2} - \left(\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}\right)^{1/2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \left(e^{i\frac{3}{8}\pi} - e^{i\frac{5}{8}\pi} \right) = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \left(\cos\frac{3}{8}\pi - \cos\frac{5}{8}\pi \right)$$

$$= \boxed{\frac{2\pi}{\sqrt[4]{2}} \cos\frac{3}{8}\pi}$$ 1b

Tzn. $\boxed{I = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \cos\frac{3}{8}\pi}$ 1b (Zdziwi wygląda pewne $\cos\frac{3}{4}\pi$)

$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\pi}{2\sqrt[4]{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

(3) (14b) Nalezněte $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ řešící rovnici

$$\varphi * T_{e^{-\alpha|x|}} = T_{e^{-\beta|x|}}$$

pro zadané dané $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

Ověřte, že daná konvoluce má smysl!

__Řešení__

Je-li $\alpha = \beta$, pak $\varphi = \delta$ (2b). Proto předpokládejme dále, že $\alpha \neq \beta$. Pak

$$\mathcal{F}\left(T_{e^{-\alpha|x|}}\right) = T_{\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|})} \quad (1b), \text{ tedy}$$

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha|x|}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-2\pi i x\xi}\,dx = 2\,\mathrm{Re} \int_0^\infty e^{-(\alpha + i2\pi\xi)x}\,dx =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{-1}{(\alpha+i2\pi\xi)} e^{-(\alpha+i2\pi\xi)x}\right]_0^\infty = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{\alpha+i2\pi\xi} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2\xi^2} \quad (2b)$$

$$\mathcal{F}\left(T_{e^{-\beta|x|}}\right) = \frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2} \quad (1b)$$

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\alpha^2+4\pi^2\xi^2}{\beta^2+4\pi^2\xi^2} \ (1b) = \frac{\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}\right) \quad (1b)$$

$$\mathcal{F}(\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot T_1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\, T_{\frac{2\beta}{\beta^2+4\pi^2\xi^2}} \quad (2b)$$

Tedy (vypočtěte zpětnou transformaci)

$$\boxed{\varphi = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\delta_0 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}\, T_{e^{-\beta|x|}}} \quad (2b)$$

Konvoluce má smysl: $\delta * T = T$, $e^{-\alpha|x|}, e^{-\beta|x|} \in L^1$ (2b) $\Rightarrow$ konvoluce je dobře definovaná.

4 Nalezněte slabou* limitu posloupnosti distribucí pro $k\to\infty$

9b

$$T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}}.$$

Spočtěte $\left\langle \lim_{k\to\infty} T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}}, \varphi \right\rangle$ pro $\varphi = xe^{-x^2}$

Návod

Všimněte si, že

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi}\frac{k}{k^2x^2+1} = \frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}$$

Uvědomte si, že platí i pro lim. distribucí

a vzpomeňte si na vhodnou větu na kolo limit. Potřebné ověřte výhody jejích předpokladů!

Řešení

Vzhledem k hledání pro svojí platí

$$D\,T_{\frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2x^2+1}} = T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)^2}}. \quad 1b$$

1b Pokud slabá* konvergence, dává zjevně,

Protože distribuční derivace je spojitá vzhledem k 1b $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ($\mathcal{Y}'(\mathbb{R})$).

co je $\lim_{k\to\infty} T_{\frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2x^2+1}}$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ 1b

Protože: $0 \le \int_I \frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2x^2+1}\,dx \le \int_{\mathbb{R}} \frac{k\,dx}{\pi(k^2x^2+1)} \overset{[y=kx]}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\pi(1+y^2)} = 1$

a $\int_a^b \frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2x^2+1}\,dx \overset{[y=kx]}{=} \frac{1}{\pi}\int_{ak}^{bk}\frac{dy}{y^2+1} \to \begin{cases} 0 & 0<a<b\le\infty,\ -\infty\le a<b<0 \\ 1 & a<0<b \\ \frac{1}{2} & -\infty\le a<b=0,\ 0=a<b\le+\infty \end{cases}$ 2b

Jsou tedy splněny předpoklady věty, že 1b

$$\lim_{k\to\infty}\left\langle T_{\frac{k}{\pi}\frac{1}{k^2x^2+1}}, \varphi\right\rangle = \langle\delta,\varphi\rangle \;(=\varphi(0)),$$

proto $\lim_{k\to\infty}\left\langle T_{\frac{-2k^3x}{\pi(k^2x^2+1)}}, \varphi\right\rangle \overset{1b}{=} \langle\delta',\varphi\rangle \;(= -\varphi'(0))$

Proto pro $\varphi(x) = xe^{-x^2}$ je $\langle\delta',\varphi\rangle = -\varphi'(0) = -1$. 1b