Početní část zkoušky 7.6.2023

Jméno:

Skupina:

1. (9b) V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}^+$ nalezněte rozvoj funkce

$$f(x) = \sin(ax)$$

do trigonometrické řady na $(-\pi, \pi)$. Vyšetřete bodovou, lokálně stejnoměrnou a stejnoměrnou konvergenci této řady na $[-\pi, \pi]$ resp. na $(-\pi, \pi)$.

2. (18b) Vhodným použitím reziduové věty spočtěte (nezapomeňte vyjasnit, v jakém smyslu integrály počítáte)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh(4x)}\,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Přímým výpočtem na základě výpočtu výše ověřte, že platí očekávaný vztah

$$\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh(4x)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

3. (15b) Uvažujte funkci $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{|x|^2}{1+|x|^4}.$$

V jakých Lebesgueových prostorech tato funkce leží? Spočtěte její Fourierovu transformaci a vysvětlete, v jakém smyslu provádíte výpočet.

Poznámka: Připomeňme, že pro $f(r) = F(x)$ a pro tři prostorové dimenze platí, že $\mathcal{F}(T_F) = T_h$, kde

$$h(\xi) = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(r)\frac{2r}{|\xi|}\sin(2\pi r|\xi|)\,\mathrm{d}r$$

(pokud limita existuje). Odůvodněte, že daná limita opravdu existuje!

4. (18b) Uvažujte posloupnost distribucí

$$T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Ověřte, že se jedná o posloupnost temperovaných distribucí.
(ii) Nalezněte $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ takovou, že $T_n \rightharpoonup^* T$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
(iii) Přímým výpočtem ověřte, že skutečně platí

$$\mathcal{F}(T_n) \rightharpoonup^* \mathcal{F}(T)$$

v $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
(iv) Na základě výpočtu výše pro posloupnost T_n opakujte body (i)–(ii) pro posloupnost

$$G_n = n^2(\delta_{\frac{1}{n}} - 2\delta_0 + \delta_{-\frac{1}{n}}).$$