Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 3.5.2023

Definice (6 Tenzorový součin distribucí D 24.3.1)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ a $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ jsou otevřené množiny, $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ a $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Pak definujeme *tenzorový součin distribucí* T a G předpisy

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x,y) \rangle := \langle T(x), \langle G(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

a

$$\langle G(y) \otimes T(x), \varphi(x,y) \rangle := \langle G(y), \langle T(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Opakování II

Lemma (3 L 24.3.2)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ *a* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *jsou otevřené množiny,* $\Omega' \subset\subset \Omega_1 \times \Omega_2$ *je otevřená množina a* $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$*. Pak existují otevřená množina* $\widetilde{\Omega}_1 \subset\subset \Omega_1$ *a čísla* $C > 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *s následující vlastností:*
jestliže $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$*, pak funkce* ψ*:* $x \mapsto \langle G(y), \varphi(x,y) \rangle$ *splňuje*

$$\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega}_1),$$

$$D^\alpha \psi(x) = \langle G(y), D_x^\alpha \varphi(x,y) \rangle \qquad \text{pro všechna } x \in \widetilde{\Omega}_1$$

a

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq C \max_{\substack{(s,y) \in \overline{\Omega'} \\ \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^M \\ |\beta| \leq m}} |D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(s,y)| \qquad \text{pro všechna } x \in \widetilde{\Omega}_1.$$

Navíc je operace $\varphi(x,y) \mapsto \psi(x)$ *lineární a spojitá z* $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *do* $\mathcal{D}(\Omega_1)$*.*

Opakování III

Lemma (4 L 24.3.3)

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *kde* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$ *a* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *jsou otevřené množiny. Potom existuje posloupnost* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ *taková, že*

$$\varphi_k(x,y) = \sum_{i=1}^{n_k} u_k^i(x) v_k^i(y) \qquad \text{pro všechna } k \in \mathbb{N},$$

kde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ *a pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *a* $i \in \{1, \dots, n_k\}$ *platí* $u_k^i \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, $v_k^i \in \mathcal{D}(\Omega_2)$, *a*

$$\varphi_k \to \varphi \qquad \text{v } \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

23.3.1 Tenzorový součin dvojice distribucí a temperovaných distribucí I

Věta (5 O vlastnostech tenzorového součinu distribucí V 24.3.4)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *a* $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^L$ *jsou otevřené množiny a* $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *a* $H \in \mathcal{D}'(\Omega_3)$. *Pak*

(i) $T \otimes G = G \otimes T$ *(tenzorový součin je komutativní)*

(ii) $(T \otimes G) \otimes H = T \otimes (G \otimes H)$ *(tenzorový součin je asociativní)*

(iii) $\operatorname{supp}(T \otimes G) = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} G$.

Věta (6 O tenzorovém součinu temperovaných distribucí V 24.3.6)

Mějme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^M)$. *Pak* $T \otimes G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N+M})$.

Lemma (5 L 24.3.7)

Nechť $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^M)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+M})$, $\psi(x) := \langle G(y), \varphi(x,y) \rangle$. *Potom pro libovolné* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí*

$$D^\alpha \psi(x) = \langle G(y), D_x^\alpha \varphi(x,y) \rangle$$

a existuje $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $C > 0$ *takové, že pro každé* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *je*

$$\|\psi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^{p+q}(\mathbb{R}^{N+M})},$$

tedy zobrazení $\varphi \mapsto \psi$ *je spojité a lineární z* $\mathcal{S}^{p+q}(\mathbb{R}^{N+M})$ *do* $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ *pro libovolné* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

23.3.1 Tenzorový součin dvojice distribucí a temperovaných distribucí I

Věta (5 O vlastnostech tenzorového součinu distribucí V 24.3.4)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *a* $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^L$ *jsou otevřené množiny a* $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *a* $H \in \mathcal{D}'(\Omega_3)$. *Pak*

(i) $T \otimes G = G \otimes T$ *(tenzorový součin je komutativní)*

(ii) $(T \otimes G) \otimes H = T \otimes (G \otimes H)$ *(tenzorový součin je asociativní)*

(iii) $\operatorname{supp}(T \otimes G) = \operatorname{supp} T \times \operatorname{supp} G$.

Věta (6 O tenzorovém součinu temperovaných distribucí V 24.3.6)

Mějme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^M)$. *Pak* $T \otimes G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N+M})$.

Lemma (5 L 24.3.7)

Nechť $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^M)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+M})$, $\psi(x) := \langle G(y), \varphi(x,y)\rangle$. *Potom pro libovolné* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí*

$$D^\alpha \psi(x) = \langle G(y), D_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$$

a existuje $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $C > 0$ *takové, že pro každé* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *je*

$$\|\psi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^{p+q}(\mathbb{R}^{N+M})},$$

tedy zobrazení $\varphi \mapsto \psi$ *je spojité a lineární z* $\mathcal{S}^{p+q}(\mathbb{R}^{N+M})$ *do* $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ *pro libovolné* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

23.3.1 Tenzorový součin dvojice distribucí a temperovaných distribucí I

Věta (5 O vlastnostech tenzorového součinu distribucí V 24.3.4)

Nechť $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^N$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^M$ *a* $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^L$ *jsou otevřené množiny a* $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $G \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ *a* $H \in \mathcal{D}'(\Omega_3)$. *Pak*
(i) $T \otimes G = G \otimes T$ *(tenzorový součin je komutativní)*
(ii) $(T \otimes G) \otimes H = T \otimes (G \otimes H)$ *(tenzorový součin je asociativní)*
(iii) $\mathrm{supp}(T \otimes G) = \mathrm{supp}\, T \times \mathrm{supp}\, G$.

Věta (6 O tenzorovém součinu temperovaných distribucí V 24.3.6)

Mějme $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^M)$. *Pak* $T \otimes G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{N+M})$.

Lemma (5 L 24.3.7)

Nechť $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^M)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+M})$, $\psi(x) := \langle G(y), \varphi(x,y)\rangle$. *Potom pro libovolné* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *platí*

$$D^\alpha \psi(x) = \langle G(y), D_x^\alpha \varphi(x,y)\rangle$$

a existuje $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $C > 0$ *takové, že pro každé* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *je*

$$\|\psi\|_{\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{S}^{p+q}(\mathbb{R}^{N+M})},$$

tedy zobrazení $\varphi \mapsto \psi$ *je spojité a lineární z* $\mathcal{S}^{p+q}(\mathbb{R}^{N+M})$ *do* $\mathcal{S}^p(\mathbb{R}^N)$ *pro libovolné* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

23.3.2 Konvoluce distribucí a temperovaných distribucí I

Definice (7 Konvergence k 1 D 24.3.11)

Nechť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$. Píšeme, že $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$, jestliže
(i) pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^{2N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\eta_k \equiv 1 \qquad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$ je $\{D^\alpha \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejně stejnoměrně omezená.

Definice (8 Konvoluce distribucí D 24.3.13)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je uvedená limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pak distribuci $T \star G$ (*konvoluce distribucí* T a G) definujeme předpisem

$$\langle T \star G, \varphi\rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

23.3.2 Konvoluce distribucí a temperovaných distribucí I

Definice (7 Konvergence k 1 D 24.3.11)

Nechť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$. Píšeme, že $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$, jestliže
(i) pro každý kompakt $K \subset \mathbb{R}^{2N}$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\eta_k \equiv 1 \qquad \text{na } K \text{ pro všechna } k \geq k_0$$

(ii) pro každé $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2N}$ je $\{D^\alpha \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ stejně stejnoměrně omezená.

Definice (8 Konvoluce distribucí D 24.3.13)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y) \rangle$$

$$\text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

kde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2N})$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je uvedená limita nezávislá na volbě posloupnosti $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$. Pak distribuci $T \star G$ (*konvoluce distribucí* T a G) definujeme předpisem

$$\langle T \star G, \varphi \rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y) \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

23.3.2 Konvoluce distribucí a temperovaných distribucí II

Věta (7 O vlastnostech konvoluce distribucí V 24.3.17)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$.
(i) *Jestliže existuje* $T \star G$*, pak existuje i* $G \star T$ *a platí* $T \star G = G \star T$ *(tedy konvoluce je komutativní).*
(ii) *Jestliže existuje* $T \star G$*, pak existují i* $D^\alpha T \star G$ *a* $T \star D^\alpha G$ *a platí*

$$D^\alpha(T \star G) = D^\alpha T \star G = T \star D^\alpha G.$$

Lemma (6 L 24.3.19)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a pro otevřené množiny* $A, B \subset \mathbb{R}^N$ *splňující* $\operatorname{supp} T \subset A$ *a* $\operatorname{supp} G \subset B$ *je pro každé* $R > 0$ *jim odpovídající množina* T_R *omezená.*
Potom $T \star G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *existuje a je ji možno popsat formulí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle,$$

přičemž ξ *a* η *jsou libovolné funkce z* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$*, rovné* 1 *na jistém okolí množin* A *respektive* B *a rovné nule vně jistých okolí množin* A *respektive* B.
Navíc operace $T \mapsto T \star G$ *je spojitá z* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *do* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *v následujícím smyslu:*
jestliže pro posloupnost $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *splňující* $T_k \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *platí* $\operatorname{supp} T_k \subset K$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$*, kde* $K \subset A$ *je kompaktní množina, pak* $T_k \star G \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

23.3.2 Konvoluce distribucí a temperovaných distribucí II

Věta (7 O vlastnostech konvoluce distribucí V 24.3.17)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$.
(i) *Jestliže existuje* $T \star G$*, pak existuje i* $G \star T$ *a platí* $T \star G = G \star T$ *(tedy konvoluce je komutativní).*
(ii) *Jestliže existuje* $T \star G$*, pak existují i* $D^\alpha T \star G$ *a* $T \star D^\alpha G$ *a platí*

$$D^\alpha(T \star G) = D^\alpha T \star G = T \star D^\alpha G.$$

Lemma (6 L 24.3.19)

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *a pro otevřené množiny* $A, B \subset \mathbb{R}^N$ *splňující* $\operatorname{supp} T \subset A$ *a* $\operatorname{supp} G \subset B$ *je pro každé* $R > 0$ *jim odpovídající množina* T_R *omezená.*
Potom $T \star G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *existuje a je ji možno popsat formulí*

$$\langle T \star G, \varphi \rangle = \langle T(x) \otimes G(y), \xi(x)\eta(y)\varphi(x+y) \rangle,$$

přičemž ξ *a* η *jsou libovolné funkce z* $C^\infty(\mathbb{R}^N)$*, rovné* 1 *na jistém okolí množin* A *respektive* B *a rovné nule vně jistých okolí množin* A *respektive* B.
Navíc operace $T \mapsto T \star G$ *je spojitá z* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *do* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *v následujícím smyslu:*
jestliže pro posloupnost $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *splňující* $T_k \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ *platí* $\operatorname{supp} T_k \subset K$ *pro všechna* $k \in \mathbb{N}$*, kde* $K \subset A$ *je kompaktní množina, pak* $T_k \star G \rightharpoonup^* 0$ *v* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.