Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 17.4.2023

Opakování I

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,
pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

Opakování I

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^{\alpha}\varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,

pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

Opakování II

Definice (3 Distribuce D 23.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$ označujeme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{D}(\Omega)$, přičemž pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ spojitost chápeme ve smyslu

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Prvky množiny $\mathcal{D}'(\Omega)$ nazýváme *distribuce* na Ω.
Pro $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ píšeme $T_1 = T_2$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Opakování II

Tvrzení (3 O postačujících podmínkách pro koncentraci L 23.5.11)

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C(\mathbb{R})$ *je taková posloupnost, že pro každé* $M > 0$ *existuje* $C > 0$ *splňující*

$$-M \leq a < b \leq M \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \int_a^b f_k \, \mathrm{d}x \right| \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Nechť navíc pro každý omezený interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *platí*

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & \text{pokud } 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{pokud } 0 \notin [a, b]. \end{cases}$$

Pak $T_{f_k} \rightharpoonup^* \delta_0$.

Věta (6 Poissonova sumační formule V 23.6.3)

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. *Potom*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n).$$

Důsledek (1 Pozn. 23.6.4)

Poissonova sumační formule platí i pro funkce z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

22.6 Fourierovy řady z pohledu distribucí. Poissonova sumační formule

Věta (6 Poissonova sumační formule V 23.6.3)

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Potom

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\varphi)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n).$$

Důsledek (1 Pozn. 23.6.4)

Poissonova sumační formule platí i pro funkce z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definice (11 Složení distribuce a difeomorfizmu D 23.7.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\mathbf{h}\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ je nekonečně hladký difeomorfizmus zobrazující množinu Ω na množinu $\widetilde{\Omega}$ a $T \in \mathcal{D}'(\widetilde{\Omega})$ je distribuce. Pak definujeme distribuci $T \circ \mathbf{h} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ předpisem

$$\langle T \circ \mathbf{h}, \varphi \rangle := \left\langle T, \frac{1}{|\mathrm{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}^{-1}(y))|}\varphi(\mathbf{h}^{-1}(y)) \right\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

22.8 Distribuce s kompaktním nosičem

Definice (12 Konvergence na $C^\infty(\Omega)$ D 23.8.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$. Jestliže pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$D^\alpha \varphi_k \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{na } \Omega,$$

pak píšeme $\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0.$$

Věta (7 O rozšíření distribuce s kompaktním nosičem V 23.8.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má kompaktní nosič právě tehdy, když existuje jednoznačné spojité lineární rozšíření distribuce T na $C^\infty(\Omega)$.

Důsledek (2 Důsl. 23.8.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Jestliže T má kompaktní nosič, pak má konečný řád.

22.8 Distribuce s kompaktním nosičem

Definice (12 Konvergence na $C^\infty(\Omega)$ D 23.8.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$. Jestliže pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$D^\alpha \varphi_k \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{na } \Omega,$$

pak píšeme $\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\iff} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{C^\infty(\Omega)}{\to} 0.$$

Věta (7 O rozšíření distribuce s kompaktním nosičem V 23.8.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má kompaktní nosič právě tehdy, když existuje jednoznačné spojité lineární rozšíření distribuce T na $C^\infty(\Omega)$.

Důsledek (2 Důsl. 23.8.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Jestliže T má kompaktní nosič, pak má konečný řád.

22.8 Distribuce s kompaktním nosičem

Definice (12 Konvergence na $C^\infty(\Omega)$ D 23.8.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$. Jestliže pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ platí

$$D^\alpha \varphi_k \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0 \qquad \text{na } \Omega,$$

pak píšeme $\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{C^\infty(\Omega)}{\longrightarrow} 0.$$

Věta (7 O rozšíření distribuce s kompaktním nosičem V 23.8.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má kompaktní nosič právě tehdy, když existuje jednoznačné spojité lineární rozšíření distribuce T na $C^\infty(\Omega)$.

Důsledek (2 Důsl. 23.8.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Jestliže T má kompaktní nosič, pak má konečný řád.