Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 5.4.2023

20 Opakování I

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,
pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

Definice (1 Hladké funkce s kompaktním nosičem str. 136)

Prostor všech takových nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ takových, že jejich nosič je omezený (pro Ω neomezenou) a leží v Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definice (2 Konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)$ 23.1.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Jestliže platí
(i) existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$
(ii) $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows 0$ na K pro každý multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$,
pak píšeme $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$. Dále zavádíme

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \varphi_k - \varphi \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0.$$

Opakování II

Definice (3 Distribuce D 23.1.3)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Symbolem $\mathcal{D}'(\Omega)$ označujeme množinu všech spojitých lineárních funkcionálů nad $\mathcal{D}(\Omega)$, přičemž pro $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ spojitost chápeme ve smyslu

$$\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} \varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \langle T, \varphi_k \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Prvky množiny $\mathcal{D}'(\Omega)$ nazýváme *distribuce* na Ω.
Pro $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ píšeme $T_1 = T_2$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, jestliže

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Opakování II

Věta (1 Kritérium spojitosti lineárního funkcionálu nad $\mathcal{D}(\Omega)$ V 23.2.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál. Pak je T spojitý právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $\Omega' \subset\subset \Omega$ existují konstanty $M > 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq M\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega'})} \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

Definice (4 Řád distribuce V 23.2.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že T má *konečný řád*, jestliže existuje číslo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že má vlastnosti z předchozí věty pro všechny otevřené množiny $\Omega' \subset\subset \Omega$ (ale jemu příslušející konstanta M už na Ω' záviset může). Nejmenší takové číslo m nazýváme *řádem* distribuce T v Ω.

Opakování II

Věta (1 Kritérium spojitosti lineárního funkcionálu nad $\mathcal{D}(\Omega)$ V 23.2.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál. Pak je T spojitý právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu $\Omega' \subset\subset \Omega$ existují konstanty $M > 0$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq M\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega'})} \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

Definice (4 Řád distribuce V 23.2.2)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že T má *konečný řád*, jestliže existuje číslo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že má vlastnosti z předchozí věty pro všechny otevřené množiny $\Omega' \subset\subset \Omega$ (ale jemu příslušející konstanta M už na Ω' záviset může). Nejmenší takové číslo m nazýváme *řádem* distribuce T v Ω.

Opakování III

Definice (5 Nulová distribuce na množině, nosič distribuce, distribuce s kompaktním nosičem D 23.2.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že distribuce T je *nulová* na otevřené množině $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, jestliže

$$\langle T, \varphi \rangle = 0 \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega}).$$

Dále definujeme *nosič distribuce* T předpisem

$$\operatorname{supp} T := \Omega \setminus \bigcup \{\widetilde{\Omega} \subset \Omega\colon \widetilde{\Omega} \text{ je otevřená a } T \text{ je nulová na } \widetilde{\Omega}\}.$$

Jestliže navíc platí $\operatorname{supp} T \subset\subset \Omega$, říkáme, že distribuce T má *kompaktní nosič* v Ω.

Definice (6 Radonova míra na $\mathbb{R}^N$, nosič míry D 23.2.10)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Míra μ na $\mathbb{R}^N$ se nazývá *nezáporná Radonova míra* na Ω, jestliže její definiční obor obsahuje všechny borelovské podmnožiny Ω, μ je zevnitř regulární (pro každou měřitelnou $A \subset \Omega$ platí $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \colon K \subset A, K \text{ je kompaktní}\}$) a μ je lokálně konečná (pro každé $x \in \Omega$ existuje otevřená množina $U \subset \Omega$ taková, že $x \in U$ a $\mu(U) < \infty$). *Radonovou (znaménkovou) mírou* nazýváme každou množinovou funkci μ, kterou lze zapsat jako $\mu = \mu_1 - \mu_2$, kde μ_1, μ_2 jsou nezáporné Radonovy míry.

Definice (7 Nezáporná distribuce D 23.2.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že distribuce T je *nezáporná na* Ω, jestliže

$$\langle T, \varphi \rangle \geq 0 \qquad \text{pro každou nezápornou funkci } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

22.2 Základní vlastnosti distribucí I

Definice (6 Radonova míra na $\mathbb{R}^N$, nosič míry D 23.2.10)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Míra μ na $\mathbb{R}^N$ se nazývá *nezáporná Radonova míra* na Ω, jestliže její definiční obor obsahuje všechny borelovské podmnožiny Ω, μ je zevnitř regulární (pro každou měřitelnou $A \subset \Omega$ platí $\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset A, K \text{ je kompaktní}\}$) a μ je lokálně konečná (pro každé $x \in \Omega$ existuje otevřená množina $U \subset \Omega$ taková, že $x \in U$ a $\mu(U) < \infty$).
Radonovou (znaménkovou) mírou nazýváme každou množinovou funkci μ, kterou lze zapsat jako $\mu = \mu_1 - \mu_2$, kde μ_1, μ_2 jsou nezáporné Radonovy míry.

Definice (7 Nezáporná distribuce D 23.2.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Řekneme, že distribuce T je *nezáporná na* Ω, jestliže

$$\langle T, \varphi \rangle \geq 0 \qquad \text{pro každou nezápornou funkci } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

22.2 Základní vlastnosti distribucí II

Věta (2 Rieszova věta o reprezentaci V 23.2.13)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $L\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ je nezáporný (podobně jako v předchozí definici) lineární funkcionál na prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem v Ω. Pak L je spojitý a navíc existuje právě jedna nezáporná Radonova míra, pro kterou platí

$$\langle L, f \rangle = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \qquad \textit{pro každou funkci } f \in C_0(\Omega).$$

Věta (3 O charakterizaci distribucí řádu nula V 23.2.15)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má řád nula právě tehdy, když existuje Radonova míra μ taková, že $T = T_\mu$.

Věta (4 O charakterizaci nezáporných distribucí V 23.2.16)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T je nezáporná právě tehdy, když existuje nezáporná Radonova míra μ taková, že $T = T_\mu$.

22.2 Základní vlastnosti distribucí II

Věta (2 Rieszova věta o reprezentaci V 23.2.13)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $L\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ je nezáporný (podobně jako v předchozí definici) lineární funkcionál na prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem v Ω. Pak L je spojitý a navíc existuje právě jedna nezáporná Radonova míra, pro kterou platí

$$\langle L, f\rangle = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \qquad \text{pro každou funkci } f \in C_0(\Omega).$$

Věta (3 O charakterizaci distribucí řádu nula V 23.2.15)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má řád nula právě tehdy, když existuje Radonova míra μ taková, že $T = T_\mu$.

Věta (4 O charakterizaci nezáporných distribucí V 23.2.16)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T je nezáporná právě tehdy, když existuje nezáporná Radonova míra μ taková, že $T = T_\mu$.

22.2 Základní vlastnosti distribucí II

Věta (2 Rieszova věta o reprezentaci V 23.2.13)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $L\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ je nezáporný (podobně jako v předchozí definici) lineární funkcionál na prostoru spojitých funkcí s kompaktním nosičem v Ω. Pak L je spojitý a navíc existuje právě jedna nezáporná Radonova míra, pro kterou platí

$$\langle L, f \rangle = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{pro každou funkci } f \in C_0(\Omega).$$

Věta (3 O charakterizaci distribucí řádu nula V 23.2.15)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T má řád nula právě tehdy, když existuje Radonova míra μ taková, že $T = T_\mu$.

Věta (4 O charakterizaci nezáporných distribucí V 23.2.16)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce. Pak T je nezáporná právě tehdy, když existuje nezáporná Radonova míra μ taková, že $T = T_\mu$.

Definice (8 Slabá* konvergence distribucí D 23.3.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme, že distribuce T_k *konvergují slabě** v $\mathcal{D}'(\Omega)$ k distribuci T (píšeme $T_k \rightharpoonup^* T$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$), jestliže

$$\langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \qquad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Analogicky zavádíme (slabý*) součet řady distribucí $\sum_{k=1}^{\infty} T_k =: T$ podmínkou

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \qquad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lemma (1 L 23.3.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ a platí

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| < \infty \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Jestliže $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$, pak

$$\langle T_k, \varphi_k \rangle \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

22.3 Slabá* konvergence distribucí I

Definice (8 Slabá* konvergence distribucí D 23.3.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Řekneme, že distribuce T_k *konvergují slabě** v $\mathcal{D}'(\Omega)$ k distribuci T (píšeme $T_k \rightharpoonup^* T$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$), jestliže

$$\langle T_k, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \qquad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Analogicky zavádíme (slabý*) součet řady distribucí $\sum_{k=1}^{\infty} T_k =: T$ podmínkou

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle T_k, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \qquad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Lemma (1 L 23.3.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ a platí

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |\langle T_k, \varphi \rangle| < \infty \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Jestliže $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi_k \overset{\mathcal{D}(\Omega)}{\to} 0$, pak

$$\langle T_k, \varphi_k \rangle \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Věta (5 O charakterizaci slabé* konvergence distribucí V 23.3.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ *je taková posloupnost, že pro každé* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *má číselná posloupnost* $\{\langle T_k, \varphi\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ *vlastní limitu pro* $k \to \infty$. *Pak funkcionál* T *definovaný předpisem*

$$\langle T, \varphi\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T_k, \varphi\rangle \qquad \textit{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

splňuje $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *a* $T_k \rightharpoonup^* T$ *v* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definice (9 Součin distribuce a hladké funkce 23.4.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distribuce a $a \in C^\infty(\Omega)$. Pak definujeme distribuci aT předpisem

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$