# Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 27.3.2023

# 20 Fourierova transformace
## 20.1 Schwartzův prostor I

### Definice (1 Schwartzův prostor D 21.1.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{1}$$

### Definice (2 Konvergence ve Schwartzově prostoru D 21.1.5)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci $f$ ve Schwartzově prostoru, jestliže

$$\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Pak píšeme $f_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} f$.

# 20 Fourierova transformace
## 20.1 Schwartzův prostor I

### Definice (1 Schwartzův prostor D 21.1.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$. Pak *Schwartzův prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je množina všech funkcí $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, které splňují

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \|x^\alpha D^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N. \tag{1}$$

### Definice (2 Konvergence ve Schwartzově prostoru D 21.1.5)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ konverguje k funkci $f$ ve Schwartzově prostoru, jestliže

$$\|f_n - f\|_{\alpha,\beta} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \text{pro všechna } \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N.$$

Pak píšeme $f_n \overset{\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)}{\to} f$.

# 20.1 Schwartzův prostor II

## Věta (1 O základních vlastnostech Schwartzova prostoru V 21.1.8)

(i) *Schwartzův prostor tvoří algebru vzhledem ke sčítání a násobení funkcí.*
(ii) *Nechť* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$ *a* $P$ *je polynom v* $\mathbb{R}^N$. *Pak* $D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $Pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
(iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $p \in [1, \infty]$.
(iv) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *je hustý v* $L^p(\mathbb{R}^N)$ *pro všechna* $p \in [1, \infty)$.

## Definice (3 Konvoluce Text str. 110)

Nechť $f$, $g$ jsou měřitelné funkce v $\mathbb{R}^N$. Předpokládejme, že

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

má smysl pro s.v. $x \in \mathbb{R}^N$. Potom výraz výše nazýváme konvolucí funkcí $f$ a $g$.

## Věta (2 O vlastnostech konvoluce V 21.1.9)

(i) *Nechť* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
(ii) *Nechť* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(iii) *Nechť* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $\sup_{|\alpha| \le k, x \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha f(x)| < \infty$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in C^k(\mathbb{R}^N)$.
(iv) *Nechť* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

### Definice (3 Konvoluce Text str. 110)

Nechť $f$, $g$ jsou měřitelné funkce v $\mathbb{R}^N$. Předpokládejme, že

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

má smysl pro s.v. $x \in \mathbb{R}^N$. Potom výraz výše nazýváme konvolucí funkcí $f$ a $g$.

### Věta (2 O vlastnostech konvoluce V 21.1.9)

(i) *Nechť* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
(ii) *Nechť* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(iii) *Nechť* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^N)$, $\sup_{|\alpha|\le k, x\in\mathbb{R}^N} |D^\alpha f(x)| < \infty$ *a* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.
*Pak* $f \star g = g \star f \in C^k(\mathbb{R}^N)$.
(iv) *Nechť* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Pak* $f \star g = g \star f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

# 20.2 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru I

## Definice (4 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru D 21.2.1)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak (*přímou*) *Fourierovou transformací* funkce $f$ nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \, \mathrm{d}x$$

a *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací* funkce $f$ nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)} \, \mathrm{d}x.$$

## Lemma (1 O základních vztazích pro Fourierovu transformaci L 21.2.4)

*Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak platí (od druhé do čtvrté části je integrační proměnnou $x$)*

(i) $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, $\overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\bar{f})(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(\bar{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$

(ii) $\mathcal{F}(f(x-z))(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(z,\xi)}\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ *pro všechna* $z \in \mathbb{R}^N$

(iii) $\mathcal{F}(f(x))(\xi - \eta) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\eta)} f(x))(\xi)$ *pro všechna* $\eta \in \mathbb{R}^N$

(iv) $\mathcal{F}(f(\varepsilon x))(\xi) = |\varepsilon|^{-N}\mathcal{F}(f(x))(\frac{\xi}{\varepsilon})$ *pro všechna* $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

# 20.2 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru I

## Definice (4 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru D 21.2.1)

Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak (*přímou*) *Fourierovou transformací* funkce $f$ nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x$$

a *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací* funkce $f$ nazýváme funkci $\xi \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$ zadanou předpisem

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

## Lemma (1 O základních vztazích pro Fourierovu transformaci L 21.2.4)

*Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Pak platí (od druhé do čtvrté části je integrační proměnnou $x$)*

(i) $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, $\overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\bar{f})(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(\bar{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(\xi)}$

(ii) $\mathcal{F}(f(x-z))(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(z,\xi)}\mathcal{F}(f(x))(\xi)$ *pro všechna* $z \in \mathbb{R}^N$

(iii) $\mathcal{F}(f(x))(\xi - \eta) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi(x,\eta)}f(x))(\xi)$ *pro všechna* $\eta \in \mathbb{R}^N$

(iv) $\mathcal{F}(f(\varepsilon x))(\xi) = |\varepsilon|^{-N}\mathcal{F}(f(x))(\frac{\xi}{\varepsilon})$ *pro všechna* $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

### Lemma (2 O zachování parity při Fourierově transformaci L 21.2.7)

*Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $j \in \{1, \ldots, N\}$. Je-li $f$ sudá v proměnné $x_j$, pak je $\mathcal{F}(f)$ sudá v proměnné $\xi_j$. Analogicky pro lichost v proměnné $x_j$. Speciálně v případě $N = 1$ máme*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\int_0^\infty \cos(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pro } f \text{ sudou} \\ -2\mathrm{i}\int_0^\infty \sin(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pro } f \text{ lichou.} \end{cases}$$

### Lemma (3 O zachování radiální symetrie při Fourierově transformaci L 21.2.8)

*Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je radiálně symetrická. Pak i $\mathcal{F}(f)$ je radiálně symetrická. Speciálně v případě $N = 3$ při zápisu $f(x) = g(|x|)$ máme pro každé $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty g(\varrho)\varrho \sin(2\pi\varrho|\xi|)\,\mathrm{d}\varrho.$$

## 20.2 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru II

### Lemma (2 O zachování parity při Fourierově transformaci L 21.2.7)

*Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $j \in \{1, \dots, N\}$. Je-li $f$ sudá v proměnné $x_j$, pak je $\mathcal{F}(f)$ sudá v proměnné $\xi_j$. Analogicky pro lichost v proměnné $x_j$. Speciálně v případě $N = 1$ máme*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \begin{cases} 2\int_0^\infty \cos(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pro } f \text{ sudou} \\ -2\mathrm{i}\int_0^\infty \sin(2\pi x\xi) f(x)\,\mathrm{d}x & \text{pro } f \text{ lichou.} \end{cases}$$

### Lemma (3 O zachování radiální symetrie při Fourierově transformaci L 21.2.8)

*Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ je radiálně symetrická. Pak i $\mathcal{F}(f)$ je radiálně symetrická. Speciálně v případě $N = 3$ při zápisu $f(x) = g(|x|)$ máme pro každé $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{2}{|\xi|} \int_0^\infty g(\varrho)\varrho \sin(2\pi\varrho|\xi|)\,\mathrm{d}\varrho.$$

### Věta (3 O základních vlastnostech Fourierovy transformace V 21.2.10)

*Nechť $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. Pak platí*
(i) $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$
(ii) $D^\alpha(\mathcal{F}(f)(\xi)) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$,
$D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$
(iii) $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$
(iv) $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
(v) $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f)g\,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^N} f\mathcal{F}^{-1}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f)g\,\mathrm{d}x$
(vi) $\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi)$.

### Věta (4 Schwartzova věta V 21.2.14)

*Fourierova transformace je na prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ prostá, zobrazuje $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a inverzním zobrazením k Fourierově transformaci je na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ inverzní Fourierova transformace.*

# 20.2 Fourierova transformace na Schwartzově prostoru III

## Věta (3 O základních vlastnostech Fourierovy transformace V 21.2.10)

*Nechť* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$. *Pak platí*
(i) $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-\mathrm{i}2\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$
(ii) $D^\alpha(\mathcal{F}(f)(\xi)) = \mathcal{F}((-\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$,
$D^\alpha(\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}((\mathrm{i}2\pi x)^\alpha f(x))(\xi)$
(iii) $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$, $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$
(iv) $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{F}^{-1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$
(v) $\int_{\mathbb{R}^N} f \mathcal{F}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}(f) g\,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^N} f \mathcal{F}^{-1}(g)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{F}^{-1}(f) g\,\mathrm{d}x$
(vi) $\mathcal{F}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(f \star g)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)\mathcal{F}^{-1}(g)(\xi)$.

## Věta (4 Schwartzova věta V 21.2.14)

*Fourierova transformace je na prostoru* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *prostá, zobrazuje* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *na* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a inverzním zobrazením k Fourierově transformaci je na* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *inverzní Fourierova transformace.*