Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 8.3.2023

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle \varphi \rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle \varphi_i \rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle) = \emptyset \qquad \text{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle \varphi_j \rangle)$. Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \textit{pro všechna } j \in \{1,\dots,k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle\varphi_i\rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle) = \emptyset \qquad \textit{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^k (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle)$. Nechť funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^k \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Opakování II

Věta (26 O Taylorově řadě příslušející holomorfní funkci V 20.7.1)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina,* $z_0 \in \Omega$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω *a* $R > 0$ *je tak malé, že* $B_R(z_0) \subset \Omega$. *Pak existuje jednoznačně určená posloupnost komplexních koeficientů* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *taková, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{na } B_R(z_0).$$

Navíc pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $r \in (0, R)$ *platí*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Opakování III

Věta (29 O Laurentově rozvoji V 20.7.6)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < b \leq \infty$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak existuje jednoznačně určený systém koeficientů $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ takový, že platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{pro všechna } z \in B_{a,b}(z_0)$$

s konvencí

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n := \lim_{k \to \infty} \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n (z - z_0)^n.$$

Navíc pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a $r \in (a, b)$ platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Opakování IV

Definice (14 Laurentova řada, regulární část Laurentovy řady, hlavní část Laurentovy řady D 20.7.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < b \leq \infty$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak se řada z předchozí věty nazývá *Laurentova řada* funkce f na mezikruží $B_{a,b}(z_0)$, její část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *regulární část* a část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *hlavní část*.

Definice (15 Izolované singularity a jejich typy D 20.8.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Funkce f má v bodě z_0 *izolovanou singularitou*, jestliže je f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a není holomorfní v bodě z_0. O izolované singularitě říkáme, že je

(i) *odstranitelná*, jestliže existuje vlastní $\lim_{z\to z_0} f(z)$

(ii) *pól*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

(iii) *podstatná*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Opakování IV

Definice (14 Laurentova řada, regulární část Laurentovy řady, hlavní část Laurentovy řady D 20.7.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq a < b \leq \infty$ a funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $B_{a,b}(z_0)$. Pak se řada z předchozí věty nazývá *Laurentova řada* funkce f na mezikruží $B_{a,b}(z_0)$, její část $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *regulární část* a část $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ se nazývá *hlavní část*.

Definice (15 Izolované singularity a jejich typy D 20.8.1)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Funkce f má v bodě z_0 *izolovanou singularitou*, jestliže je f holomorfní na nějakém prstencovém okolí bodu z_0 a není holomorfní v bodě z_0. O izolované singularitě říkáme, že je
(i) *odstranitelná*, jestliže existuje vlastní $\lim_{z\to z_0} f(z)$
(ii) *pól*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$
(iii) *podstatná*, jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z)$ neexistuje.

Opakování V

Věta (30 O charakterizaci odstranitelné singularity V 20.8.3)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *izolovanou singularitu. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce* f *má v bodě* z_0 *odstranitelnou singularitu*
(ii) *funkce* f *je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu* z_0
(iii) *hlavní část Laurentovy řady funkce* f *se středem* z_0 *je identicky nulová*
(iv) *funkce* f *lze v bodě* z_0 *dodefinovat (nebo předefinovat), aby byla holomorfní v bodě* z_0*.*

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta I

Definice (16 k-násobný nulový bod funkce D 20.8.5)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě z_0 a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 *k-násobný nulový bod* (nebo *k-násobný kořen*), jestliže

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \{0, 1, \dots, k-1\} \qquad \text{a} \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Lemma (5 O rozkladu holomorfní funkce mající kořen L 20.8.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě z_0 a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) *Bod z_0 je k-násobným kořenem funkce f*

(ii) *existuje funkce $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní v bodě z_0, splňuje $g(z_0) \neq 0$ a*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \qquad \text{na jistém okolí bodu } z_0.$$

Definice (16 k-násobný nulový bod funkce D 20.8.5)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě z_0 a $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 *k-násobný nulový bod* (nebo *k-násobný kořen*), jestliže

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \qquad \text{a} \qquad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Lemma (5 O rozkladu holomorfní funkce mající kořen L 20.8.7)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě z_0 a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Bod z_0 je k-násobným kořenem funkce f*
(ii) *existuje funkce $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní v bodě z_0, splňuje $g(z_0) \neq 0$ a*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \qquad \text{na jistém okolí bodu } z_0.$$

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta II

Lemma (6 O rozkladu funkce s pólem L 20.8.8)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má izolovanou singularitu v bodě z_0. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Funkce f má v bodě z_0 pól*
(ii) *existuje jednoznačné číslo $k \in \mathbb{N}$ a funkce $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je holomorfní v bodě z_0, splňuje $h(z_0) \neq 0$ a*

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} h(z) \qquad \text{na jistém prstencovém okolí bodu } z_0.$$

Věta (31 O charakterizaci pólu V 20.8.9)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu a $k \in \mathbb{N}$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Funkce f má v bodě z_0 pól násobnosti k*
(ii) *existují čísla $a_{-k}, a_{-k+1}, \ldots, a_{-1} \in \mathbb{C}$ a funkce $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že g je holomorfní v bodě z_0, $a_{-k} \neq 0$ a*

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$$

na jistém prstencovém okolí bodu z_0.

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta II

Lemma (6 O rozkladu funkce s pólem L 20.8.8)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ *a* $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má izolovanou singularitu v bodě* z_0*. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce* f *má v bodě* z_0 *pól*
(ii) *existuje jednoznačné číslo* $k \in \mathbb{N}$ *a funkce* $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, která je holomorfní v bodě* z_0*, splňuje* $h(z_0) \neq 0$ *a*

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} h(z) \qquad \text{na jistém prstencovém okolí bodu } z_0.$$

Věta (31 O charakterizaci pólu V 20.8.9)

Nechť $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$ *izolovanou singularitu a* $k \in \mathbb{N}$*. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.*
(i) *Funkce* f *má v bodě* z_0 *pól násobnosti* k
(ii) *existují čísla* $a_{-k}, a_{-k+1}, \dots, a_{-1} \in \mathbb{C}$ *a funkce* $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *taková, že* g *je holomorfní v bodě* z_0*,* $a_{-k} \neq 0$ *a*

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + g(z)$$

na jistém prstencovém okolí bodu z_0*.*

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta III

Věta (32 O charakterizaci podstatné singularity V 20.8.10)

Nechť $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Funkce f má v bodě z_0 podstatnou singularitu*
(ii) *hlavní část Laurentova rozvoje funkce f se středem z_0 má nekonečně mnoho nenulových koeficientů.*

Věta (33 O charakterizaci izolovaných singularit v nekonečnu V 20.8.11)

Nechť $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě ∞ izolovanou singularitu.
(i) *Funkce f má v nekonečnu odstranitelnou singularitu právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu je identicky nulová. Navíc jsou oba výroky ekvivalentní tomu, že funkce f je omezená na jistém prstencovém okolí nekonečna.*
(ii) *Funkce f má v nekonečnu pól právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu obsahuje jen konečný počet netriviálních členů.*
(iii) *Funkce f má v nekonečnu podstatnou singularitu právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu obsahuje nekonečný počet netriviálních členů.*

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta III

Věta (32 O charakterizaci podstatné singularity V 20.8.10)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *Funkce f má v bodě z_0 podstatnou singularitu*
(ii) *hlavní část Laurentova rozvoje funkce f se středem z_0 má nekonečně mnoho nenulových koeficientů.*

Věta (33 O charakterizaci izolovaných singularit v nekonečnu V 20.8.11)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě ∞ izolovanou singularitu.
(i) *Funkce f má v nekonečnu odstranitelnou singularitu právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu je identicky nulová. Navíc jsou oba výroky ekvivalentní tomu, že funkce f je omezená na jistém prstencovém okolí nekonečna.*
(ii) *Funkce f má v nekonečnu pól právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu obsahuje jen konečný počet netriviálních členů.*
(iii) *Funkce f má v nekonečnu podstatnou singularitu právě tehdy, když hlavní část Laurentovy řady funkce f v nekonečnu obsahuje nekonečný počet netriviálních členů.*

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta IV

Věta (34 Casorati–Weierstrassova věta V 20.8.14)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatnou singularitu. Pak pro každé $w \in \mathbb{C}^*$ existuje posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ taková, že

$$z_n \to z_0 \qquad a \qquad f(z_n) \to w.$$

Věta (35 Picardova věta V 20.8.15)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatnou singularitu. Pak v každém prstencovém okolí bodu z_0 nabývá všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

Věta (34 Casorati–Weierstrassova věta V 20.8.14)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatnou singularitu. Pak pro každé $w \in \mathbb{C}^*$ existuje posloupnost $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ taková, že

$$z_n \to z_0 \qquad a \qquad f(z_n) \to w.$$

Věta (35 Picardova věta V 20.8.15)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatnou singularitu. Pak v každém prstencovém okolí bodu z_0 nabývá všech hodnot z $\mathbb{C}$ kromě nejvýše jedné.

Definice (17 Reziduum ve vlastním bodě D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient a_{-1} stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Definice (18 Reziduum v nekonečnu D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ∞ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě ∞ nazýváme hodnotu $-a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$ v rozvoji na $B_{r,\infty}(z_1)$, tedy

$$\operatorname{Res}_{\infty} f := -a_{-1}.$$

Definice (17 Reziduum ve vlastním bodě D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě z_0 nazýváme koeficient a_{-1} stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$, tedy

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Definice (18 Reziduum v nekonečnu D 20.7.7)

Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a ∞ je izolovanou singularitou funkce f. Potom reziduum funkce f v bodě ∞ nazýváme hodnotu $-a_{-1}$, kde a_{-1} je koeficient stojící v Laurentově rozvoji u členu $(z - z_0)^{-1}$ v rozvoji na $B_{r,\infty}(z_1)$, tedy

$$\operatorname{Res}_{\infty} f := -a_{-1}.$$

19.9 Izolované singularity, rezidua, reziduová věta VI

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$. *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Věta (37 Reziduová věta pro reziduum v nekonečnu V 20.8.19)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Ext}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$. *Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_\infty f.$$

Věta (36 Reziduová věta V 20.8.17)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka,* $k \in \mathbb{N}$ *a* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \operatorname{Int}\Gamma$*. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f.$$

Věta (37 Reziduová věta pro reziduum v nekonečnu V 20.8.19)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Ext}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Ext}\Gamma}$*. Pak*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}_\infty f.$$

Věta (38 O součtu reziduí V 20.8.21)

Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$. *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Pak*

$$\operatorname{Res}_\infty f + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f = 0.$$

Definice (19 Meromorfní funkce D 20.8.22)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $K \subset \Omega$ je nejvýše spočetná množina, která nemá žádný hromadný bod v Ω. Jestliže funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\Omega \setminus K$ a v bodech množiny K má póly, říkáme, že f je *meromorfní funkce* na Ω.

Věta (38 O součtu reziduí V 20.8.21)

Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a* $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$. *Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Pak*

$$\operatorname{Res}_\infty f + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f = 0.$$

Definice (19 Meromorfní funkce D 20.8.22)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $K \subset \Omega$ je nejvýše spočetná množina, která nemá žádný hromadný bod v Ω. Jestliže funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\Omega \setminus K$ a v bodech množiny K má póly, říkáme, že f je *meromorfní funkce* na Ω.

19.10 Aplikace reziduové věty na výpočet integrálů I

Věta (39 První věta o výpočtu reziduí V 20.9.2)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, funkce $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě z_0 izolovanou singularitu a funkce $g, h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou v bodě z_0 holomorfní.
(i) *Má-li f v bodě z_0 odstranitelnou singularitu, pak* $\operatorname{Res}_{z_0} f = 0$.
(ii) *Má-li f v bodě z_0 pól násobnosti nejvýše $k \in \mathbb{N}$, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(k-1)!} (z - z_0)^k f(z) \right)^{(k-1)}.$$

(iii) *Má-li f v bodě z_0 pól násobnosti jedna, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0}(fg) = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f.$$

Speciálně pokud $g(z_0) = 0$, pak má funkce fg v bodě z_0 odstranitelnou singularitu.
(iv) *Jestliže h má v bodě z_0 jednoduchý kořen, pak*

$$\operatorname{Res}_{z_0} \left(\frac{g}{h} \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$