Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 27.2.2023

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v Ω. Pak pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ splňující $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ jsou regulární Jordanovy po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$, pro které platí

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle\varphi_i\rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle) = \emptyset \qquad \text{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle)$. Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na Ω a spojitá na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Opakování I

Věta (14 Cauchyova věta (druhá verze) V 20.4.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je jednoduše souvislá oblast a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní v* Ω*. Pak pro každou uzavřenou po částech* C^1*-křivku* φ *splňující* $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$ *platí*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Věta (15 Cauchyova věta (třetí verze) V 20.4.7)

Nechť $k \in \mathbb{N}$ *a* $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ *jsou regulární Jordanovy po částech* C^1*-křivky v* $\mathbb{C}$*, pro které platí*

$$\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle \subset \operatorname{Int}\varphi \qquad \textit{pro všechna } j \in \{1, \dots, k\},$$

$$(\operatorname{Int}\varphi_i \cup \langle\varphi_i\rangle) \cap (\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle) = \emptyset \qquad \textit{kdykoliv } i \neq j$$

a všechny uvedené křivky jsou obíhány ve stejném smyslu. Položme $\Omega := \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{k}(\operatorname{Int}\varphi_j \cup \langle\varphi_j\rangle)$*. Nechť funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω *a spojitá na* $\overline{\Omega}$*. Pak*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Lemma (4 Jordanovo lemma L 20.4.13)

Nechť $R_0 > 0$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0, |z| > R_0\}$, $\alpha \geq 0$ *a* $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je spojitá na* $\overline{\Omega}$. *Pro každé* $R \geq R_0$ *definujme křivku* Γ_R *předpisem*

$$\Gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \textit{pro } t \in [0, \pi].$$

Definujme ještě $M_R = \max_{\langle \Gamma_R \rangle} |f|$. *Jestliže nastal jeden z případů*
(i) $\alpha = 0$ *a* $RM_R \to 0$ *pro* $R \to +\infty$
(ii) $\alpha > 0$ *a* $M_R \to 0$ *pro* $R \to +\infty$,
pak

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Analogické tvrzení platí pro $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z < 0, |z| > R_0\}$, $\alpha \geq 0$, *křivky*

$$\Gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \qquad \textit{pro } t \in [\pi, 2\pi]$$

a integrály $\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha z}\,\mathrm{d}z$.

19.6 Cauchyův vzorec a jeho důsledky I

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ je kladně orientovaná Jordanova po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$. Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\operatorname{Int}\Gamma$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$. Pak pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, \mathrm{d}z.$$

Navíc f má v $\operatorname{Int}\Gamma$ derivace všech řádů a pro každé $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ a každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, \mathrm{d}z.$$

Důsledek (5 O holomorfnosti derivací Důsl. 20.5.1)

Je-li f holomorfní v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, pak zde má derivace všech řádů a všechny jsou zde holomorfní. Navíc funkce $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ reprezentující reálnou a imaginární složku funkce f jsou nekonečněkrát diferencovatelné v odpovídající množině a všechny jejich derivace jsou harmonické.

19.6 Cauchyův vzorec a jeho důsledky I

Věta (17 Cauchyův vzorec V 20.5.1)

Nechť Γ *je kladně orientovaná Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*. Nechť* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $\operatorname{Int}\Gamma$ *a spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\Gamma}$*. Pak pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Navíc f *má v* $\operatorname{Int}\Gamma$ *derivace všech řádů a pro každé* $z_0 \in \operatorname{Int}\Gamma$ *a každé* $k \in \mathbb{N}$ *platí*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Důsledek (5 O holomorfnosti derivací Důsl. 20.5.1)

Je-li f *holomorfní v otevřené množině* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, pak zde má derivace všech řádů a všechny jsou zde holomorfní. Navíc funkce* $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *reprezentující reálnou a imaginární složku funkce* f *jsou nekonečněkrát diferencovatelné v odpovídající množině a všechny jejich derivace jsou harmonické.*

Věta (19 O střední hodnotě V 20.5.3)

Nechť $r > 0$, $z_0 = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$ *a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $B_r(z_0)$ *a spojitá na* $\overline{B_r(z_0)}$. *Pak*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_\psi \widetilde{f} \,\mathrm{d}s,$$

kde pod křivkovým integrálem prvního druhu máme funkci $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *definovanou předpisem* $\widetilde{f}(x, y) = f(x + \mathrm{i}y)$ *a* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *je křivka definovaná předpisem*

$$\psi(t) = (z_1 + r\cos t, z_2 + r\sin t) \qquad \textit{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Věta (19 Princip maxima modulu V 20.5.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω. *Jestliže* f *na* Ω *nabývá svého maxima modulu (vzhledem k* Ω*), pak je konstantní na* Ω.

19.6 Cauchyův vzorec a jeho důsledky II

Věta (19 O střední hodnotě V 20.5.3)

Nechť $r > 0$, $z_0 = z_1 + \mathrm{i}z_2 \in \mathbb{C}$ *a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* $B_r(z_0)$ *a spojitá na* $\overline{B_r(z_0)}$. *Pak*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\psi} \widetilde{f}\,\mathrm{d}s,$$

kde pod křivkovým integrálem prvního druhu máme funkci $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *definovanou předpisem* $\widetilde{f}(x, y) = f(x + \mathrm{i}y)$ *a* $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *je křivka definovaná předpisem*

$$\psi(t) = (z_1 + r\cos t, z_2 + r\sin t) \qquad \text{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Věta (19 Princip maxima modulu V 20.5.4)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je holomorfní na* Ω. *Jestliže* f *na* Ω *nabývá svého maxima modulu (vzhledem k* Ω*), pak je konstantní na* Ω.