Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 20.2.2023

Opakování I

Definice (9 Křivka D 20.3.1)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Křivkou třídy* C^1 v $\mathbb{C}$ nazýváme zobrazení $\varphi \in C^1([a, b]; \mathbb{C})$ (v krajních bodech uvažujeme jednostrannou derivaci z vnitřní strany intervalu). *Křivkou po částech třídy* C^1 v $\mathbb{C}$ nazýváme zobrazení $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a uzavřené intervaly $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ takové, že $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ a $\varphi|_{[a_{j-1}, a_j]}$ pro $j \in \{1, \dots, n\}$ jsou křivky třídy C^1. Je-li φ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{C}$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\varphi'(t) \neq 0 \qquad \text{na } [a, b]$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).
Množina $\langle\varphi\rangle := \varphi([a, b])$ se nazývá *geometrický obraz křivky* φ. Pokud existuje $\varphi'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se nazývá *tečný vektor* ke křivce φ v bodě $\varphi(t)$. Řekneme, že φ je *jednoduchá*, jestliže φ je prostá na $[a, b)$ a na $(a, b]$, a φ^{-1} je spojitá na obrazu intervalu (a, b). Řekneme, že φ je *uzavřená*, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$. Řekneme, že φ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

19.3 Opakování II

Definice (10 Součet křivek, opačná křivka D 20.3.2)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ a $(\psi, [c, d])$ jsou křivky v $\mathbb{C}$ a $\varphi(b) = \psi(c)$. Pak definujeme *součet křivek* $\varphi \oplus \psi$ předpisem

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [a, b] \\ \psi(t - b + c) & \text{pro } t \in [b, b - c + d]. \end{cases}$$

Opačnou křivkou ke křivce $(\varphi, [a, b])$ nazýváme křivku $(\ominus\varphi, [-b, -a])$ danou předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \qquad \text{pro } t \in [-b, -a].$$

Definice (11 Křivkový integrál D 20.3.3)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ je po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na $\langle\varphi\rangle$. Jestliže existuje Lebesgueův integrál

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

pak se nazývá *křivkový integrál* funkce f přes křivku φ. Dále zavádíme *délku křivky* φ v $\mathbb{C}$ jako

$$\ell_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

19.3 Opakování II

Definice (10 Součet křivek, opačná křivka D 20.3.2)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ a $(\psi, [c, d])$ jsou křivky v $\mathbb{C}$ a $\varphi(b) = \psi(c)$. Pak definujeme *součet křivek* $\varphi \oplus \psi$ předpisem

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [a, b] \\ \psi(t - b + c) & \text{pro } t \in [b, b - c + d]. \end{cases}$$

Opačnou křivkou ke křivce $(\varphi, [a, b])$ nazýváme křivku $(\ominus\varphi, [-b, -a])$ danou předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \qquad \text{pro } t \in [-b, -a].$$

Definice (11 Křivkový integrál D 20.3.3)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ je po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na $\langle\varphi\rangle$. Jestliže existuje Lebesgueův integrál

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

pak se nazývá *křivkový integrál* funkce f přes křivku φ. Dále zavádíme *délku křivky* φ v $\mathbb{C}$ jako

$$\ell_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

19.3 Integrace podél křivek I

Věta (8 O vlastnostech křivkového integrálu V 20.3.7)

Nechť φ, ψ jsou po částech C^1-křivky v $\mathbb{C}$ a funkce $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definované na $\langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle$. Pak platí

(i) $\int_\varphi (f(z) + g(z))\,\mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\varphi g(z)\,\mathrm{d}z$ *a* $\int_\varphi cf(z)\,\mathrm{d}z = c\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$, *kdykoliv integrály na pravých stranách existují a* $c \in \mathbb{C}$

(ii) $\int_{\ominus\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ *a* $\int_{\varphi\oplus\psi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\psi f(z)\,\mathrm{d}z$, *kdykoliv integrály na pravých stranách existují*

(iii) $\left|\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sup_{\langle\varphi\rangle} |f|\ell_\varphi$, *kdykoliv integrál nalevo existuje*

(iv) *je-li* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *posloupnost funkcí komplexní proměnné, které jsou spojité na množině* $\langle\varphi\rangle$, *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $\langle\varphi\rangle$, *pak existuje* $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ *a platí*

$$\int_\varphi f_n(z)\,\mathrm{d}z \overset{n\to\infty}{\to} \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(v) *nechť* $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má spojitou derivaci na nějaké otevřené množině obsahující* $\langle\varphi\rangle$. *Označme* $\eta := h \circ \varphi$ *(se stejným definičním oborem jako má* φ*). Pak* η *je po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$, *platí* $\eta'(t) = (h(\varphi(t)))' = h'(\varphi(t))\varphi'(t)$ *až na konečný počet bodů a*

$$\int_\eta f(w)\,\mathrm{d}w = \int_\varphi (f \circ h)(z)h'(z)\,\mathrm{d}z.$$

Definice (12 Primitivní funkce D 20.3.10)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f, $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definované na Ω. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k f na Ω, jestliže

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{pro všechna } z \in \Omega.$$

Věta (9 O vlastnostech primitivní funkce V 20.3.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f, F, g, G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definované na Ω, F je primitivní funkcí k f na Ω a G je primitivní funkcí k g na Ω.
(i) *Jestliže $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pak $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na Ω.*
(ii) *Jestliže $c \in \mathbb{C}$, pak $F + c$ je primitivní funkcí k f na Ω.*
(iii) *Je-li H primitivní funkcí k fG na Ω, pak $FG - H$ je primitivní funkcí k Fg na Ω.*

19.3 Integrace podél křivek II

Definice (12 Primitivní funkce D 20.3.10)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f, $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definované na Ω.
Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k f na Ω, jestliže

$$F'(z) = f(z) \qquad \text{pro všechna } z \in \Omega.$$

Věta (9 O vlastnostech primitivní funkce V 20.3.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f, F, g, G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou definované na Ω, F je primitivní funkcí k f na Ω a G je primitivní funkcí k g na Ω.
(i) *Jestliže $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pak $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na Ω.*
(ii) *Jestliže $c \in \mathbb{C}$, pak $F + c$ je primitivní funkcí k f na Ω.*
(iii) *Je-li H primitivní funkcí k fG na Ω, pak $FG - H$ je primitivní funkcí k Fg na Ω.*

19.3 Integrace podél křivek III

Věta (10 O charakterizaci existence primitivní funkce V 20.3.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) *Funkce f má na Ω primitivní funkci.*

(ii) *Pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ, jejíž obraz leží v Ω, platí*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(iii) *Křivkový integrál z funkce f nezávisí na cestě v Ω.*

Lemma (1 O výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce L 20.3.14)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω a F je primitivní funkce k f na Ω. Pak pro každou po částech C^1-křivku $(\varphi, [a, b])$, jejíž obraz leží v Ω, platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

19.3 Integrace podél křivek III

Věta (10 O charakterizaci existence primitivní funkce V 20.3.12)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.

(i) *Funkce f má na Ω primitivní funkci.*

(ii) *Pro každou uzavřenou po částech C^1-křivku φ, jejíž obraz leží v Ω, platí*

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(iii) *Křivkový integrál z funkce f nezávisí na cestě v Ω.*

Lemma (1 O výpočtu křivkového integrálu pomocí primitivní funkce L 20.3.14)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω a F je primitivní funkce k f na Ω. Pak pro každou po částech C^1-křivku $(\varphi, [a, b])$, jejíž obraz leží v Ω, platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

19.3 Integrace podél křivek IV

Lemma (2 O vztahu nezávislosti na cestě a existence primitivní funkce L 20.3.15)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω. Jestliže křivkový integrál z funkce f nezávisí na cestě v Ω, pak f má v Ω primitivní funkci.
Speciálně při zafixovaném $a \in \Omega$ položme

$$F(z) := \int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde $\int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w$ je křivkový integrál z funkce f přes libovolnou po částech C^1-křivku s počátečním bodem a, koncovým bodem z a obrazem ležícím v Ω. Pak F je primitivní funkce k f v Ω.

Lemma (3 O rozkladu uzavřené lomené čáry L 20.3.19)

Každou uzavřenou lomenou čáru je možné přeskládat do konečného počtu jednoduchých uzavřených lomených čar a konečného počtu dvojic obráceně orientovaných úseček. Tedy tvrzení předchozího lemmatu platí, je-li křivkový integrál dané funkce přes libovolnou jednoduchou uzavřenou čáru ležící v Ω nulový.

19.3 Integrace podél křivek IV

Lemma (2 O vztahu nezávislosti na cestě a existence primitivní funkce L 20.3.15)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá na Ω. Jestliže křivkový integrál z funkce f nezávisí na cestě v Ω, pak f má v Ω primitivní funkci.
Speciálně při zafixovaném $a \in \Omega$ položme

$$F(z) := \int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w,$$

kde $\int_a^z f(w)\,\mathrm{d}w$ je křivkový integrál z funkce f přes libovolnou po částech C^1-křivku s počátečním bodem a, koncovým bodem z a obrazem ležícím v Ω. Pak F je primitivní funkce k f v Ω.

Lemma (3 O rozkladu uzavřené lomené čáry L 20.3.19)

Každou uzavřenou lomenou čáru je možné přeskládat do konečného počtu jednoduchých uzavřených lomených čar a konečného počtu dvojic obráceně orientovaných úseček. Tedy tvrzení předchozího lemmatu platí, je-li křivkový integrál dané funkce přes libovolnou jednoduchou uzavřenou čáru ležící v Ω nulový.

19.3 Integrace podél křivek V

Věta (11 O jednoznačnosti primitivní funkce V 20.3.18)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* $f, F_1, F_2 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. *Jestliže* F_1 *a* F_2 *jsou primitivní funkce k* f *na* Ω, *pak existuje* $c \in \mathbb{C}$ *takové, že*

$$F_1(z) = F_2(z) + c \qquad \text{na } \Omega.$$

Věta (12 Jordanova věta V 20.4.1)

Nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$. Pak existují souvislé množiny $\operatorname{Int}\varphi$ *(vnitřek φ) a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *(vnějšek φ) takové, že platí*
(i) $\operatorname{Int}\varphi$ *je omezená a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *je neomezená*
(ii) $\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{Ext}\varphi = \mathbb{C}$, *přičemž množiny na levé straně jsou po dvou disjunktní*
(iii) $\partial(\operatorname{Int}\varphi) = \partial(\operatorname{Ext}\varphi) = \langle\varphi\rangle$.

Definice (13 Jednoduše souvislá oblast D 20.4.2)

Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ existuje spojitá funkce $H\colon [0,1]^2 \to \Omega$ a bod $z \in \Omega$ takový, že

$$H(t,0) = \varphi(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad H(0,s) = H(1,s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad H(t,1) = z \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Věta (12 Jordanova věta V 20.4.1)

Nechť φ *je Jordanova křivka v* $\mathbb{C}$. *Pak existují souvislé množiny* $\operatorname{Int}\varphi$ *(vnitřek* φ*) a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *(vnějšek* φ*) takové, že platí*
(i) $\operatorname{Int}\varphi$ *je omezená a* $\operatorname{Ext}\varphi$ *je neomezená*
(ii) $\operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{Ext}\varphi = \mathbb{C}$, *přičemž množiny na levé straně jsou po dvou disjunktní*
(iii) $\partial(\operatorname{Int}\varphi) = \partial(\operatorname{Ext}\varphi) = \langle\varphi\rangle$.

Definice (13 Jednoduše souvislá oblast D 20.4.2)

Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže pro každou Jordanovu křivku $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ existuje spojitá funkce $H\colon [0,1]^2 \to \Omega$ a bod $z \in \Omega$ takový, že

$$H(t,0) = \varphi(t) \quad \text{pro všechna } t \in [0,1], \quad H(0,s) = H(1,s) \quad \text{pro všechna } s \in [0,1]$$
$$\text{a} \quad H(t,1) = z \quad \text{pro všechna } t \in [0,1].$$

Věta (13 Cauchyova věta (první verze) V 20.4.3)

Nechť φ *je regulární Jordanova po částech* C^1*-křivka v* $\mathbb{C}$*, funkce* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *je spojitá na* $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$ *a holomorfní na* $\operatorname{Int}\varphi$*. Pak*

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$