Matematika pro fyziky II

Milan Pokorný

Přednáška 15.2.2023

Věta (3 První věta o Cauchy–Riemannových podmínkách V 20.2.9)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{C}$ *derivaci. Nechť funkce* $\mathbf{F}$, u, v *jsou jako výše. Pak*
(i) *funkce* u, v *v bodě* $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *splňují Cauchy–Riemannovy podmínky*
(ii) *funkce* $\mathbf{F}$ *má v bodě* (a_1, a_2) *totální diferenciál a platí* $\mathrm{J}_{\mathbf{F}}(a_1, a_2) = |f'(a)|^2$.

Věta (4 Druhá věta o Cauchy–Riemannových podmínkách V 20.2.11)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, *funkce* u, v *jsou funkci* f *přiřazeny jako výše a jsou definované na nějakém okolí bodu* $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. *Jestliže funkce* u *a* v *mají v bodě* (a_1, a_2) *totální diferenciál a splňují v něm Cauchy–Riemannovy podmínky, pak funkce* f *má v bodě* $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ *derivaci a platí pro ni*

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2).$$

Věta (3 První věta o Cauchy–Riemannových podmínkách V 20.2.9)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in \mathbb{C}$ derivaci. Nechť funkce $\mathbf{F}$, u, v jsou jako výše. Pak
(i) *funkce u, v v bodě $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ splňují Cauchy–Riemannovy podmínky*
(ii) *funkce $\mathbf{F}$ má v bodě (a_1, a_2) totální diferenciál a platí $\mathrm{J}_{\mathbf{F}}(a_1, a_2) = |f'(a)|^2$.*

Věta (4 Druhá věta o Cauchy–Riemannových podmínkách V 20.2.11)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, funkce u, v jsou funkci f přiřazeny jako výše a jsou definované na nějakém okolí bodu $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Jestliže funkce u a v mají v bodě (a_1, a_2) totální diferenciál a splňují v něm Cauchy–Riemannovy podmínky, pak funkce f má v bodě $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$ derivaci a platí pro ni

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2).$$

Definice (8 Harmonická funkce D 20.2.12)

Nechť $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná a je třídy C^2 na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že g je *harmonická* na Ω, jestliže

$$\Delta g = 0 \qquad \text{na } \Omega$$

(připomeňme, že *Laplaceův operátor* je definován předpisem $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_N^2}$).

Věta (5 O harmoničnosti složek holomorfní funkce V 20.2.13)

(i) *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, funkce u, v jsou jí přiřazeny jako výše a jsou třídy C^2 na nějakém okolí bodu $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Pak u a v jsou harmonické na jistém okolí bodu (a_1, a_2).*
(ii) *Nechť $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je na jistém okolí bodu $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ harmonická a třídy C^2. Pak existuje funkce $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na témže okolí bodu (a_1, a_2) (dokonce třídy C^2, harmonická a spolu s u splňující Cauchy–Riemannovy podmínky) taková, že funkce*

$$f(z) := u(z_1, z_2) + \mathrm{i}v(z_1, z_2)$$

je holomorfní v bodě $a_1 + \mathrm{i}a_2$. Analogicky pro imaginární složku v.

19.2 Holomorfní funkce II

Definice (8 Harmonická funkce D 20.2.12)

Nechť $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná a je třídy C^2 na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že g je *harmonická* na Ω, jestliže

$$\Delta g = 0 \qquad \text{na } \Omega$$

(připomeňme, že *Laplaceův operátor* je definován předpisem $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_N^2}$).

Věta (5 O harmoničnosti složek holomorfní funkce V 20.2.13)

(i) *Nechť $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě $a = a_1 + \mathrm{i}a_2$, funkce u, v jsou jí přiřazeny jako výše a jsou třídy C^2 na nějakém okolí bodu $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Pak u a v jsou harmonické na jistém okolí bodu (a_1, a_2).*
(ii) *Nechť $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je na jistém okolí bodu $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ harmonická a třídy C^2. Pak existuje funkce $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na témže okolí bodu (a_1, a_2) (dokonce třídy C^2, harmonická a spolu s u splňující Cauchy–Riemannovy podmínky) taková, že funkce*

$$f(z) := u(z_1, z_2) + \mathrm{i}v(z_1, z_2)$$

je holomorfní v bodě $a_1 + \mathrm{i}a_2$. Analogicky pro imaginární složku v.

Věta (6 O ortogonalitě izočar V 20.2.15)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ a funkce u, v jsou jí přiřazeny jako výše a jsou třídy C^1. Jestliže $f' \neq 0$ všude na Ω, pak pro všechna $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je možné množiny

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+\mathrm{i}y \in \Omega,\ u(x,y) = c_1\} \quad a \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+\mathrm{i}y \in \Omega,\ v(x,y) = c_2\}$$

lokálně popsat jako obrazy C^1-křivek a jsou ortogonální (v bodech průniku obrazů jsou tečné vektory ortogonální).

Věta (7 O holomorfnosti součtu mocninné řady V 20.2.16)

Každá mocninná řada $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ s komplexními koeficienty definuje na svém konvergenčním kruhu holomorfní funkci. Na konvergenčním kruhu navíc platí

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Věta (6 O ortogonalitě izočar V 20.2.15)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ a funkce u, v jsou jí přiřazeny jako výše a jsou třídy C^1. Jestliže $f' \neq 0$ všude na Ω, pak pro všechna $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ je možné množiny

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+\mathrm{i}y \in \Omega,\ u(x, y) = c_1\} \quad a \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x+\mathrm{i}y \in \Omega,\ v(x, y) = c_2\}$$

lokálně popsat jako obrazy C^1-křivek a jsou ortogonální (v bodech průniku obrazů jsou tečné vektory ortogonální).

Věta (7 O holomorfnosti součtu mocninné řady V 20.2.16)

Každá mocninná řada $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ s komplexními koeficienty definuje na svém konvergenčním kruhu holomorfní funkci. Na konvergenčním kruhu navíc platí

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Důsledek (3 Ds 20.2.17)

Každá mocninná řada s komplexními koeficienty definuje na svém konvergenčním kruhu holomorfní funkci, která je nekonečněkrát spojitě diferencovatelná a jejíž derivace jsou rovny odpovídajícím derivacím původní řady člen po členu.

19.3 Integrace podél křivek I

Definice (9 Křivka D 20.3.1)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Křivkou třídy* C^1 v $\mathbb{C}$ nazýváme zobrazení $\varphi \in C^1([a, b]; \mathbb{C})$ (v krajních bodech uvažujeme jednostrannou derivaci z vnitřní strany intervalu). *Křivkou po částech třídy* C^1 v $\mathbb{C}$ nazýváme zobrazení $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a uzavřené intervaly $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ takové, že $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ a $\varphi|_{[a_{j-1}, a_j]}$ pro $j \in \{1, \dots, n\}$ jsou křivky třídy C^1. Je-li φ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{C}$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\varphi'(t) \neq 0 \qquad \text{na } [a, b]$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).
Množina $\langle\varphi\rangle := \varphi([a, b])$ se nazývá *geometrický obraz křivky* φ. Pokud existuje $\varphi'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se nazývá *tečný vektor* ke křivce φ v bodě $\varphi(t)$. Řekneme, že φ je *jednoduchá*, jestliže φ je prostá na $[a, b)$ a na $(a, b]$, a φ^{-1} je spojitá na obrazu intervalu (a, b). Řekneme, že φ je *uzavřená*, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$. Řekneme, že φ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

19.3 Integrace podél křivek II

Definice (10 Součet křivek, opačná křivka D 20.3.2)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ a $(\psi, [c, d])$ jsou křivky v $\mathbb{C}$ a $\varphi(b) = \psi(c)$. Pak definujeme *součet křivek* $\varphi \oplus \psi$ předpisem

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [a, b] \\ \psi(t - b + c) & \text{pro } t \in [b, b - c + d]. \end{cases}$$

Opačnou křivkou ke křivce $(\varphi, [a, b])$ nazýváme křivku $(\ominus\varphi, [-b, -a])$ danou předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \qquad \text{pro } t \in [-b, -a].$$

Definice (11 Křivkový integrál D 20.3.3)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ je po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na $\langle\varphi\rangle$. Jestliže existuje Lebesgueův integrál

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

pak se nazývá *křivkový integrál* funkce f přes křivku φ. Dále zavádíme *délku křivky* φ v $\mathbb{C}$ jako

$$\ell_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

19.3 Integrace podél křivek II

Definice (10 Součet křivek, opačná křivka D 20.3.2)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ a $(\psi, [c, d])$ jsou křivky v $\mathbb{C}$ a $\varphi(b) = \psi(c)$. Pak definujeme *součet křivek* $\varphi \oplus \psi$ předpisem

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in [a, b] \\ \psi(t - b + c) & \text{pro } t \in [b, b - c + d]. \end{cases}$$

Opačnou křivkou ke křivce $(\varphi, [a, b])$ nazýváme křivku $(\ominus\varphi, [-b, -a])$ danou předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \qquad \text{pro } t \in [-b, -a].$$

Definice (11 Křivkový integrál D 20.3.3)

Nechť $(\varphi, [a, b])$ je po částech C^1-křivka v $\mathbb{C}$ a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je definovaná na $\langle\varphi\rangle$. Jestliže existuje Lebesgueův integrál

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

pak se nazývá *křivkový integrál* funkce f přes křivku φ. Dále zavádíme *délku křivky* φ v $\mathbb{C}$ jako

$$\ell_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$