Početní část zkoušky 1.2.2023

Jméno:

Skupina:

1. (7b) Nalezněte všechny stacionární body funkcionálu
$$\Phi[y] = \int_0^1 \big(y + y'\big)^2 \,\mathrm{d}x$$
na množině
$$M = \Big\{ y \in C^1([0,1]) : y(0) = 0,\ y(1) = 1 \Big\}.$$
Identifikujte (pokud existují) lokální mimima tohoto funkcionálu.

2. (6b) V závislosti na parametrech α, $\beta \in \mathbb{R}$ studujte charakter konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) řady funkcí
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^\alpha \ln^\beta(1+k)}$$
na intervalu $[0, 2\pi)$ resp. $(0, 2\pi)$.

   Pokud budete mít čas a chuť, můžete si zkusit rozmyslet, že pro hodnoty α, β, kde máme bodovou či lokálně stejnoměrnou konvergenci, ale ne stejnoměrnou konvergenci na základě postačujících kritérií, stejnoměrná konvergence nenastává. Toto bude pozitivně hodnoceno v případě nerozhodné známky.

3. (8b) Pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ konverguje Lebesgueův integrál
$$\varphi(a) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x^2} \sinh(ax^2)}{x^2} \,\mathrm{d}x.$$
Pro tyto hodnoty integrál spočtěte pomocí derivace integrálu závislého na parametru. Nezapomeňte zkontrolovat splnění předpokladů odpovídajících vět.

4. (6b) Nalezněte obsah oblasti ohraničené křivkou
$$(x^4 + y^4)^{\frac{5}{9}} = xy.$$

Teoretická část zkoušky 1.2.2023

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (a) Definujte pojmy bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí v $I \subset \mathbb{R}$.
   (b) Formulujte a dokažte tvrzení o záměně limit pro stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí a ukažte, jak odsud plyne, že stejnoměrná konvergence zachovává spojitost.
   (c) Je spojitost f_n a bodové limity f dostatečná k tomu, aby konvergence byla stejnoměrná? Buď dokažte, nebo uveďte protipříklad. V takovém případě také uveďte, jaká dodatečná podmínka na posloupnost funkcí (jiná než stejnoměrná konvergence) již stejnoměrnou konvergenci zaručuje. (Toto není třeba dokazovat.)

2. (8b) a) Formulujte Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Léviho větu), Fatouovo lemma (Fatouovu větu) a Lebesgueovu větu o dominantní konvergenci.
   b) Dokažte Lebesgueovu větu o monotonní konvergenci (Léviho větu) v obou variantách.
   c) Dokažte Lebesgueovu větu o dominantní konvergenci. (Fatouovo lemma (větu) nemusíte dokazovat.)

3. (7b) (a) Definujte křivky v $\mathbb{R}^N$, křivkový integrál 1. a 2. druhu.
   (b) Definujte jednoduchou k-plochu v $\mathbb{R}^N$ a plošný integrál 1. druhu.
   (c) Formulujte Gauss–Ostrogradského větu.
   (d) Formulujte a dokažte Greenovu větu.