Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 6.12.2022

Opakování I

Definice (6 k-plocha D 17.2.1)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $k < N$. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *k-plocha*, jestliže existuje neprázdná otevřená množina $E \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}^N$ tak, že platí
(i) $\boldsymbol{\varphi}(E) = M$
(ii) $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$
(iii) hodnost Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je rovna k všude na E.
Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá *parametrizace* plochy M.
Za 0-*plochu* považujeme libovolný bod v $\mathbb{R}^N$. Plocha se nazývá *jednoduchá*, jestliže navíc $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté na E a $\vec{\varphi}^{-1}$ spojité na $\boldsymbol{\varphi}(E)$.

Tvrzení (1 O korektnosti definice k-plochy V 17.2.4)

Nechť $k, l, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je zároveň jednoduchá k-plocha a jednoduchá l-plocha. Pak $k = l$.

Opakování I

Definice (6 k-plocha D 17.2.1)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$ a $k < N$. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *k-plocha*, jestliže existuje neprázdná otevřená množina $E \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}^N$ tak, že platí
(i) $\boldsymbol{\varphi}(E) = M$
(ii) $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(E; \mathbb{R}^N)$
(iii) hodnost Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ je rovna k všude na E.
Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ se nazývá *parametrizace* plochy M.
Za 0-*plochu* považujeme libovolný bod v $\mathbb{R}^N$. Plocha se nazývá *jednoduchá*, jestliže navíc $\boldsymbol{\varphi}$ je prosté na E a $\vec{\varphi}^{-1}$ spojité na $\boldsymbol{\varphi}(E)$.

Tvrzení (1 O korektnosti definice k-plochy V 17.2.4)

Nechť $k, l, N \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je zároveň jednoduchá k-plocha a jednoduchá l-plocha. Pak $k = l$.

Definice (8 Gramova matice D 17.2.7)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^N$. *Gramovou maticí* příslušející vektorům $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \boldsymbol{v}_k$ nazýváme matici

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k) = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_k) \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) \end{pmatrix},$$

kde $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$ značí skalární součin vektorů $\boldsymbol{v}_i$ a $\boldsymbol{v}_j$.

Opakování III

Definice (11 Plošný integrál prvního druhu D 17.2.8)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha parametrizovaná zobrazením $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ z otevřené množiny $E \subset \mathbb{R}^k$ a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* předpisem

$$\int_M f \,\mathrm{d}S := \int_E f(\varphi(t))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\varphi(t))}\,\mathrm{d}t,$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný. Číslo

$$S_k(M) := \int_M 1 \,\mathrm{d}S$$

nazýváme *k-rozměrným plošným obsahem* k-plochy M.

Věta (10 Základní vlastnosti plošného obsahu V 17.2.13)

Při translaci a rotaci se k-rozměrný plošný obsah zachovává. Při α-násobném roztažení, pro $\alpha \geq 0$, je výsledný k-rozměrný plošný obsah roven α^k-násobku původní hodnoty.

Věta (11 O nezávislosti plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci V 17.2.11)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha. Nechť (φ, E) a (ψ, F) jsou dvě její parametrizace a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak

$$\int_E f(\varphi(t))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\varphi(t))}\,\mathrm{d}t = \int_F f(\psi(s))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\psi(s))}\,\mathrm{d}s,$$

kdykoliv alespoň jeden z Lebesgueových integrálů existuje.

16.2.4 Plošný obsah jednoduché k-plochy. Plošný integrál 1. druhu

Věta (10 Základní vlastnosti plošného obsahu V 17.2.13)

Při translaci a rotaci se k-rozměrný plošný obsah zachovává. Při α-násobném roztažení, pro $\alpha \geq 0$, je výsledný k-rozměrný plošný obsah roven α^k-násobku původní hodnoty.

Věta (11 O nezávislosti plošného integrálu prvního druhu na parametrizaci V 17.2.11)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$ a $M \subset \mathbb{R}^N$ je jednoduchá k-plocha. Nechť (φ, E) a (ψ, F) jsou dvě její parametrizace a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak

$$\int_E f(\varphi(t))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\varphi(t))}\,\mathrm{d}t = \int_F f(\psi(s))\sqrt{\det \mathbb{G}(D\psi(s))}\,\mathrm{d}s,$$

kdykoliv alespoň jeden z Lebesgueových integrálů existuje.

Definice (12 Zobecněná k-plocha D 17.2.27)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$ a $M \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že M je *zobecněná k-plocha*, jestliže existuje $m \in \mathbb{N}$ a množiny $M_1, \dots, M_m$ takové, že
(i) $M = \bigcup_{i=1}^m M_i$
(ii) pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ je M_i k_i-plocha, kde $0 \le k_i \le k$
(iii) existuje alespoň jedno $i \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $k_i = k$
(iv) pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ splňující $k_i = k$ je M_i jednoduchá
(v) pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ splňující $k_i = k$ platí
$M_i \cap \bigcup_{\{j \in \{1,\dots,m\} \,:\, j \neq i\}} \overline{M_j} = \emptyset$.
Systém $\{M_i\}$ s vlastnostmi uvedenými výše se nazývá *rozklad* zobecněné k-plochy M a jednotlivým množinám M_i budeme říkat *(k_i-dimenzionální) komponenty*.

16.2.5 Plošný integrál 1. druhu přes zobecněné plochy II

Definice (13 Plošný integrál prvního druhu přes zobecněnou k-plochu D 17.2.28)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je zobecněná k-plocha, $M_1, \ldots, M_m$ je její rozklad a $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* z f přes M jako

$$\int_M f \, \mathrm{d}S := \sum_{\{i \in \{1,\ldots,m\} :\ k_i = k\}} \int_{M_i} f \, \mathrm{d}S,$$

pokud má pravá strana smysl, a *k-rozměrným plošným obsahem* nazýváme

$$S_k(M) := \sum_{\{i \in \{1,\ldots,m\} :\ k_i = k\}} S_{k_i}(M_i).$$

Věta (12 O nezávislosti na rozkladu V 17.2.30)

Plošný integrál prvního druhu přes zobecněnou k-plochu nezávisí na rozkladu.

16.2.5 Plošný integrál 1. druhu přes zobecněné plochy II

Definice (13 Plošný integrál prvního druhu přes zobecněnou k-plochu D 17.2.28)

Nechť $k, N \in \mathbb{N}$, $k < N$, $M \subset \mathbb{R}^N$ je zobecněná k-plocha, $M_1, \ldots, M_m$ je její rozklad a $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definovaná na M. Pak definujeme *plošný integrál prvního druhu* z f přes M jako

$$\int_M f \,\mathrm{d}S := \sum_{\{i \in \{1,\ldots,m\}\colon\ k_i = k\}} \int_{M_i} f \,\mathrm{d}S,$$

pokud má pravá strana smysl, a *k-rozměrným plošným obsahem* nazýváme

$$S_k(M) := \sum_{\{i \in \{1,\ldots,m\}\colon\ k_i = k\}} S_{k_i}(M_i).$$

Věta (12 O nezávislosti na rozkladu V 17.2.30)

Plošný integrál prvního druhu přes zobecněnou k-plochu nezávisí na rozkladu.

Definice (14 Vnější normálový vektor k zobecněné $(N-1)$-ploše D 17.3.2)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je množina, pro niž je $\partial\Omega$ zobecněná $(N-1)$-plocha. Nechť $x \in \partial\Omega$ je bodem nějaké $(N-1)$-dimenzionální komponenty množiny $\partial\Omega$ a $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N$ je vektor.
Řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *normálový vektor* k $\partial\Omega$ v bodě x, jestliže $\boldsymbol{\nu}$ je normálovým vektorem k tečné rovině uvedené komponenty v bodě x.
Jestliže navíc $\|\boldsymbol{\nu}\| = 1$, řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *jednotkový normálový vektor*.
Dále řekneme, že $\boldsymbol{\nu}$ je *vnější normálový vektor* k $\partial\Omega$ v bodě x, jestliže $\boldsymbol{\nu}$ je normálový vektor k $\partial\Omega$ v bodě x a existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\{x + t\boldsymbol{\nu}\colon t \in (0,\delta)\} \cap \Omega = \emptyset.$$

16.3.1 Gauss–Ostrogradského věta a její důsledky II

Věta (13 Gauss–Ostrogradského věta V 17.3.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$, a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Dále nechť $i \in \{1, \dots, N\}$ a $F \in C(\overline{\Omega})$ je taková, že $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existuje všude v Ω a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F\nu_i \,\mathrm{d}S.$$

Důsledek (1 Věta o divergenci V 17.3.6)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$ a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Nechť $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ je takové vektorové pole, že pro všechna $i \in \{1, \dots, N\}$ všude v Ω existuje $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S.$$

16.3.1 Gauss–Ostrogradského věta a její důsledky II

Věta (13 Gauss–Ostrogradského věta V 17.3.3)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$, a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Dále nechť $i \in \{1, \dots, N\}$ a $F \in C(\overline{\Omega})$ je taková, že $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ existuje všude v Ω a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F\nu_i\,\mathrm{d}S.$$

Důsledek (1 Věta o divergenci V 17.3.6)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$ a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Nechť $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ je takové vektorové pole, že pro všechna $i \in \{1, \dots, N\}$ všude v Ω existuje $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}S.$$

Důsledek (2 O integraci per partes V 17.3.15)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$ a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Dále nechť $i \in \{1, \dots, N\}$ a $U, V \in C(\overline{\Omega})$ jsou takové, že $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ existují všude v Ω a dají se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\Omega U \frac{\partial V}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} U V \nu_i \, \mathrm{d}S - \int_\Omega V \frac{\partial U}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x.$$

Důsledek (3 O výpočtu míry množiny pomocí integrace přes hranici Ds 17.3.9)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$, pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Nechť $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ je takové vektorové pole, že pro všechna $i \in \{1, \dots, N\}$ všude v Ω existuje $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Jestliže navíc platí $\operatorname{div} \boldsymbol{T} \equiv 1$ na Ω, pak

$$\lambda_N(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S.$$

16.3.1 Gauss–Ostrogradského věta a její důsledky III

Důsledek (2 O integraci per partes V 17.3.15)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$ a pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Dále nechť $i \in \{1, \dots, N\}$ a $U, V \in C(\overline{\Omega})$ jsou takové, že $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ existují všude v Ω a dají se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Pak

$$\int_\Omega U \frac{\partial V}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} U V \nu_i \, \mathrm{d}S - \int_\Omega V \frac{\partial U}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x.$$

Důsledek (3 O výpočtu míry množiny pomocí integrace přes hranici Ds 17.3.9)

Nechť $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina, jejíž hranice je zobecněná $(N-1)$-plocha splňující $S_{N-1}(\partial\Omega) < \infty$, pro kterou v každém bodě x každé její $(N-1)$-dimenzionální komponenty existuje jednotkový vnější normálový vektor $\boldsymbol{\nu}(x)$. Nechť $\boldsymbol{T} \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ je takové vektorové pole, že pro všechna $i \in \{1, \dots, N\}$ všude v Ω existuje $\frac{\partial T_i}{\partial x_i}$ a dá se spojitě rozšířit na $\overline{\Omega}$. Jestliže navíc platí $\operatorname{div} \boldsymbol{T} \equiv 1$ *na Ω, pak*

$$\lambda_N(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\nu} \, \mathrm{d}S.$$