Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 29.11.2022

16 Klasická teorie křivkového a plošného integrálu
16.1 Klasická teorie křivkového integrálu
16.1.1 Křivky v $\mathbb{R}^N$ I

Definice (1 Křivky D 17.1.2)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. *Křivkou třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ (v případě, že v I leží některý z jeho krajních bodů, jako obvykle v něm uvažujeme jen jednostrannou derivaci, která musí být vlastní). *Křivkou po částech třídy* C^1 v $\mathbb{R}^N$ nazýváme zobrazení $\boldsymbol{\varphi}\colon I \to \mathbb{R}^N$, pro které existuje $n \in \mathbb{N}$ a intervaly $I_1, \dots, I_n$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}|_{I_j}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, jsou křivky třídy C^1, $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, vnitřky těchto intervalů jsou disjunktní a sousední intervaly obsahují příslušný dělící bod. Je-li $\boldsymbol{\varphi}$ křivkou po částech třídy C^1 v $\mathbb{R}^N$, říkáme, že je *regulární*, jestliže platí

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) := (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \dots, \varphi_N'(t)) \neq \mathbf{0} \qquad \text{na } I$$

(v případě krajních bodů a výše citovaných dělících bodů bereme jen jednostranné derivace).
Množina $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle := \boldsymbol{\varphi}(I)$ se nazývá *geometrický obraz křivky* $\boldsymbol{\varphi}$. Pokud existuje $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ (tentokrát už jako oboustranná derivace), pak se tento vektor nazývá *tečný vektor* ke křivce $\boldsymbol{\varphi}$ v bodě $\boldsymbol{\varphi}(t)$ a $\boldsymbol{\tau}(t) := \frac{\boldsymbol{\varphi}'(t)}{|\boldsymbol{\varphi}'(t)|}$ (pokud $\boldsymbol{\varphi}'(t)$ existuje a je netriviální) se nazývá *jednotkový tečný vektor*.

Definice (2 Jednoduchá a uzavřená křivka D 17.1.4)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\varphi \in C(I; \mathbb{R}^N)$ je křivka. Řekneme, že φ je *jednoduchá*, jestliže platí alespoň jedna z podmínek
(i) φ je prostá na I
(ii) $I = [a, b]$ a φ je prostá na $[a, b)$ a na $(a, b]$
a φ^{-1} je spojitá na obrazu intervalu (a, b).
Řekneme, že φ je *uzavřená*, jestliže $I = [a, b]$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$. Řekneme, že φ je *Jordanova křivka*, jestliže je jednoduchá a uzavřená.

Definice (3 Součet křivek, křivka opačná D 17.1.7)

Nechť (φ, I) a (ψ, J) jsou křivky v $\mathbb{R}^N$. Nechť $-\infty \leq a_1 \leq b_1 < \infty$, $-\infty < a_2 \leq b_2 \leq \infty$, $I = (a_1, b_1]$, nebo $I = [a_1, b_1]$, $J = [a_2, b_2)$ nebo $J = [a_2, b_2]$ a $\varphi(b_1) = \psi(a_2)$. Pak definujeme *součet křivek* $\varphi \oplus \psi$ předpisem

$$(\varphi \oplus \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{pro } t \in I \\ \psi(t - b_1 + a_2) & \text{pro } t \in K \setminus I, \end{cases}$$

kde interval K je dán vzorcem $K = I \cup (J - a_2 + b_1)$ (interval J jsme posunuli, aby navazoval na I, tedy $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1)$ respektive $J - a_2 + b_1 = [b_1, b_2 - a_2 + b_1]$).
Opačnou křivkou ke křivce (φ, I) nazýváme křivku $(\ominus\varphi, -I)$ danou předpisem

$$\ominus\varphi(t) = \varphi(-t) \qquad \text{pro } t \in -I.$$

Definice (4 Křivkový integrál prvního a druhého druhu D 17.1.8)

Nechť (φ, I) je regulární po částech C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$. Jestliže $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná na $\langle\varphi\rangle$, pak *křivkový integrál prvního druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\varphi} f \,\mathrm{d}s := \int_I f(\varphi(t))\|\varphi'(t)\| \,\mathrm{d}t, \qquad \text{kde } \|\varphi'(t)\| := \sqrt{{\varphi_1'}^2(t) + \cdots + {\varphi_N'}^2(t)},$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.
Jestliže $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je vektorové pole definované na $\langle\varphi\rangle$, pak *křivkový integrál druhého druhu* zavádíme předpisem

$$\int_{\varphi} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\varphi := \int_I \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t$$

(v integrandu napravo je pro každé $t \in I$ skalární součin dvou vektorů v $\mathbb{R}^N$), pokud integrál na pravé straně existuje jako Lebesgueův a je konečný.

16.1.3 Základní vlastnosti křivkového integrálu I

Věta (1 Linearita křivkového integrálu V 17.1.12)

Nechť $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *je křivka,* $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Pak*

$$\int_\varphi (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}s = \alpha \int_\varphi f\,\mathrm{d}s + \beta \int_\varphi g\,\mathrm{d}s,$$

jestliže existují oba křivkové integrály prvního druhu na pravé straně. Analogicky pro křivkový integrál druhého druhu.

Věta (2 O integrálu přes součet křivek V 17.1.13)

Nechť $\varphi, \psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *jsou křivky, je definováno* $\varphi \oplus \psi$ *a* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. *Pak*

$$\int_{\varphi\oplus\psi} f\,\mathrm{d}s = \int_\varphi f\,\mathrm{d}s + \int_\psi f\,\mathrm{d}s,$$

jestliže existují oba křivkové integrály prvního druhu na pravé straně. Analogicky pro křivkový integrál druhého druhu.

16.1.3 Základní vlastnosti křivkového integrálu I

Věta (1 Linearita křivkového integrálu V 17.1.12)

Nechť $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *je křivka,* $f, g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Pak*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}s = \alpha \int_{\boldsymbol{\varphi}} f\,\mathrm{d}s + \beta \int_{\boldsymbol{\varphi}} g\,\mathrm{d}s,$$

jestliže existují oba křivkové integrály prvního druhu na pravé straně. Analogicky pro křivkový integrál druhého druhu.

Věta (2 O integrálu přes součet křivek V 17.1.13)

Nechť $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *jsou křivky, je definováno* $\boldsymbol{\varphi} \oplus \boldsymbol{\psi}$ *a* $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*. Pak*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}\oplus\boldsymbol{\psi}} f\,\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f\,\mathrm{d}s + \int_{\boldsymbol{\psi}} f\,\mathrm{d}s,$$

jestliže existují oba křivkové integrály prvního druhu na pravé straně. Analogicky pro křivkový integrál druhého druhu.

16.1.3 Základní vlastnosti křivkového integrálu II

Věta (3 O substituci pro křivkový integrál V 17.1.14)

Nechť $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ je regulární C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$, $\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má na $[\alpha, \beta]$ nenulovou spojitou derivaci a $\eta([\alpha, \beta]) = [a, b]$. Pak $(\boldsymbol{\varphi} \circ \eta, [\alpha, \beta])$ je regulární C^1-křivka v $\mathbb{R}^N$ a pro každou funkci $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, jejíž restrikce na $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$ je spojitá na $\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle$, platí

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}\circ\eta} f \,\mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\varphi}} f \,\mathrm{d}s.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu platí (znaménko η' je ve všech bodech intervalu $[\alpha, \beta]$ stejné, proto můžeme níže vybrat kterýkoliv z těchto bodů)

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}\circ\eta} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi} \circ \eta) = \operatorname{sign}\left(\eta'\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right) \int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}.$$

Věta (4 O nezávislosti křivkového integrálu na parametrizaci V 17.1.16)

Nechť křivky $(\boldsymbol{\varphi}, [a, b])$ *a* $(\boldsymbol{\psi}, [\alpha, \beta])$ *jsou jednoduché regulární po částech* C^1*-křivky na* $\mathbb{R}^N$ *splňující* $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle = \langle\boldsymbol{\psi}\rangle$ *a* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *je funkce, jejíž restrikce na* $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$ *je spojitá na* $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle$*. Pak*

$$\int_{\boldsymbol{\varphi}} f \, \mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{\psi}} f \, \mathrm{d}s.$$

V případě křivkového integrálu druhého druhu platí

$$\left|\int_{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\right| = \left|\int_{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\psi}\right|.$$