Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 3.11.2022

Opakování I

Definice (15 Integrál z měřitelné funkce D 15.7.1 a D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Pro $f\colon X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \colon s \text{ je měřitelná jednoduchá funkce splňující } 0 \leq s \leq f\Big\}.$$

Je-li f je měřitelná numerická funkce, pak definujeme (připomeňme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$)

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$ (tedy je-li alespoň jeden z integrálů napravo konečný).

Číslo $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ se nazývá *abstraktní Lebesgueův integrál* z funkce f podle míry μ přes množinu Ω.

Definice (16 Funkce mající (konečný) integrál D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Prostor všech funkcí na X, pro které má $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ smysl, značíme $\mathcal{L}^*(\mu; \Omega)$. Pokud je navíc integrál konečný, říkáme, že funkce f je *μ-integrovatelná* (v případě Lebesgueovy míry používáme termín *lebesgueovsky integrovatelná*) a píšeme $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$.

Opakování I

Definice (15 Integrál z měřitelné funkce D 15.7.1 a D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Pro $f\colon X \to [0, \infty]$ měřitelnou definujeme

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup\Big\{\int_\Omega s \,\mathrm{d}\mu \colon s \text{ je měřitelná jednoduchá funkce splňující } 0 \le s \le f\Big\}.$$

Je-li f je měřitelná numerická funkce, pak definujeme (připomeňme $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$)

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl v $\mathbb{R}^*$ (tedy je-li alespoň jeden z integrálů napravo konečný).
Číslo $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$ se nazývá *abstraktní Lebesgueův integrál* z funkce f podle míry μ přes množinu Ω.

Definice (16 Funkce mající (konečný) integrál D 15.8.1)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor, $\Omega \subset X$ je měřitelná. Prostor všech funkcí na X, pro které má $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$ smysl, značíme $\mathcal{L}^*(\mu; \Omega)$. Pokud je navíc integrál konečný, říkáme, že funkce f je μ-*integrovatelná* (v případě Lebesgueovy míry používáme termín *lebesgueovsky integrovatelná*) a píšeme $f \in \mathcal{L}(\mu; \Omega)$.

14.7 Obecná definice integrálu I

Věta (32 Linearita integrálu (konečné integrály) V 15.7.11 a V 15.8.8 (i))
Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a Ω je měřitelná. Jestliže $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mu)$ a

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

Důsledek (7 Odhad velikosti integrálu pro komplexní funkci Důsl. 15.8.13)
Nerovnost

$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \le \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu$$

platí i pro komplexní funkce.

Věta (32 a) Linearita integrálu (nekonečné integrály) P 18.8.11)
Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a Ω je měřitelná. Jestliže $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$ má smysl v $\mathbb{R}^*$, pak $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu I

Věta (32 Linearita integrálu (konečné integrály) V 15.7.11 a V 15.8.8 (i))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* Ω *je měřitelná. Jestliže* $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ *a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pak* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mu)$ *a*

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

Důsledek (7 Odhad velikosti integrálu pro komplexní funkci Důsl. 15.8.13)

Nerovnost

$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu$$

platí i pro komplexní funkce.

Věta (32 a) Linearita integrálu (nekonečné integrály) P 18.8.11)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* Ω *je měřitelná. Jestliže* $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $\alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$ *má smysl v* $\mathbb{R}^*$, *pak* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a*

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu I

Věta (32 Linearita integrálu (konečné integrály) V 15.7.11 a V 15.8.8 (i))

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* Ω *je měřitelná. Jestliže* $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ *a* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *pak* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(\mu)$ *a*

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

Důsledek (7 Odhad velikosti integrálu pro komplexní funkci Důsl. 15.8.13)

Nerovnost

$$\left|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu$$

platí i pro komplexní funkce.

Věta (32 a) Linearita integrálu (nekonečné integrály) P 18.8.11)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* Ω *je měřitelná. Jestliže* $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *a* $\alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$ *má smysl v* $\mathbb{R}^*$, *pak* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a*

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu II

Věta (33 O míře s hustotou V 15.7.13)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* f *je měřitelná numerická funkce definovaná na* X*. Nechť* $f \in \mathcal{L}^*(\mu; X)$*. Pro každou měřitelnou množinu* $A \subset X$ *definujme*

$$\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Pak ν *je* σ*-aditivní na* σ*-algebře* $\mathcal{M}$*. Je-li* f *navíc nezáporná, potom je* $\nu(A)$ *míra na* $\mathcal{M}$*. Je-li navíc* $f \in \mathcal{L}(\mu; X)$*, je tato míra konečná na* $\mathcal{M}$*.*

Důsledek (8)

Nechť za předpokladu předchozí věty $A_i \in \mathcal{M}\ \forall i \in \mathbb{N}$*,* $A_i \subset A_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{N}$*. Je-li* $f \in \mathcal{L}^*(\mu; \cup_{i=1}^{\infty} A_i)$*, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu II

Věta (33 O míře s hustotou V 15.7.13)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* f *je měřitelná numerická funkce definovaná na* X*. Nechť* $f \in \mathcal{L}^*(\mu; X)$*. Pro každou měřitelnou množinu* $A \subset X$ *definujme*

$$\nu(A) := \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Pak ν *je* σ*-aditivní na* σ*-algebře* $\mathcal{M}$*. Je-li* f *navíc nezáporná, potom je* $\nu(A)$ *míra na* $\mathcal{M}$*. Je-li navíc* $f \in \mathcal{L}(\mu; X)$*, je tato míra konečná na* $\mathcal{M}$*.*

Důsledek (8)

Nechť za předpokladu předchozí věty $A_i \in \mathcal{M}\ \forall i \in \mathbb{N}$*,* $A_i \subset A_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{N}$*. Je-li* $f \in \mathcal{L}^*(\mu; \cup_{i=1}^{\infty} A_i)$*, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} f \, \mathrm{d}\mu.$$

14.7 Obecná definice integrálu III

Důsledek (9)

Nechť za předpokladu předchozí věty $A_i \in \mathcal{M}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pro* $i \neq j$. *Je-li* $f \in \mathcal{L}^*(\mu; \cup_{i=1}^{\infty} A_i)$, *pak*

$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (34 O absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu V 15.8.17)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f \in \mathcal{L}(\mu)$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že*

$$\mu(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

14.7 Obecná definice integrálu III

Důsledek (9)

Nechť za předpokladu předchozí věty $A_i \in \mathcal{M}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *pro* $i \neq j$. *Je-li* $f \in \mathcal{L}^*(\mu; \cup_{i=1}^{\infty} A_i)$, *pak*

$$\int_{\cup_{i=1}^{\infty} A_i} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta (34 O absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu V 15.8.17)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $f \in \mathcal{L}(\mu)$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *takové, že*

$$\mu(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Věta (35 Lévi či Lebesgueova věta o monotonní konvergenci (zesílená verze) V 15.8.19)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor,* $\{f_n\}$ *je posloupnost měřitelných numerických funkcí definovaných na* X*, platí* $f_n \leq f_{n+1}$ *skoro všude na* X *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$*. Bodovou limitu této posloupnosti označme* f *(je definovaná skoro všude). Pak* $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ *a*

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$