Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 25.10.2022

Definition (σ-algebra D 15.2.1)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je *σ-algebra* na množině X, jestliže splňuje
(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{M}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{M}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

Definice (Míra D 15.2.9)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je σ-algebra na X. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže je σ-aditivní na $\mathcal{M}$ (jsou-li $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$). Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se pak nazývá *měřitelný prostor* (nebo *prostor s mírou*). Budeme vždy předpokládat, že existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \infty$.

Opakování I

Definition (σ-algebra D 15.2.1)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je *σ-algebra* na množině X, jestliže splňuje
(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{M}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{M}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

Definice (Míra D 15.2.9)

Nechť X je množina a $\mathcal{M}$ je σ-algebra na X. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže je σ-aditivní na $\mathcal{M}$ (jsou-li $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$). Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se pak nazývá *měřitelný prostor* (nebo *prostor s mírou*). Budeme vždy předpokládat, že existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \infty$.

Opakování II

Definice (Lebesgueova vnější míra D 15.3.1)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Položme

$$\lambda_N^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_j \colon \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je spočetné pokrytí } A \text{ tvořené omezenými otevřenými intervaly}\Big\}.$$

Zobrazení $A \mapsto \lambda_N^*(A)$ se nazývá *Lebesgueova vnější míra*.

Definice (Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra D 15.3.5)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že A je *lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každou množinu $T \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A).$$

Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin značíme $\mathcal{M}_N^*$ a zúžení Lebesgueovy vnější míry z $\exp \mathbb{R}^N$ na $\mathcal{M}_N^*$ budeme nazývat *Lebesgueovou mírou* a značit ji λ_N.

Opakování II

Definice (Lebesgueova vnější míra D 15.3.1)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Položme

$$\lambda_N^*(A) = \inf\Bigg\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{vol} I_j \colon \{I_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ je spočetné pokrytí } A$$
$$\text{tvořené omezenými otevřenými intervaly}\Bigg\}.$$

Zobrazení $A \mapsto \lambda_N^*(A)$ se nazývá *Lebesgueova vnější míra*.

Definice (Lebesgueovsky měřitelná množina a Lebesgueova míra D 15.3.5)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že A je *lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každou množinu $T \subset \mathbb{R}^N$ platí

$$\lambda_N^*(T) = \lambda_N^*(T \cap A) + \lambda_N^*(T \setminus A).$$

Množinu všech lebesgueovsky měřitelných množin značíme $\mathcal{M}_N^*$ a zúžení Lebesgueovy vnější míry z $\exp \mathbb{R}^N$ na $\mathcal{M}_N^*$ budeme nazývat *Lebesgueovou mírou* a značit ji λ_N.

Věta (8 O lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin V 15.3.8)

Každá otevřená množina v $\mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelná.

Věta (9 O úplnosti Lebesgueovy míry V 15.3.9)

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^N$ je úplná. Dokonce každá množina splňující $\lambda_N^*(A) = 0$ je lebesgueovsky měřitelná.

Věta (8 O lebesgueovské měřitelnosti otevřených množin V 15.3.8)

Každá otevřená množina v $\mathbb{R}^N$ *je lebesgueovsky měřitelná.*

Věta (9 O úplnosti Lebesgueovy míry V 15.3.9)

Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^N$ *je úplná. Dokonce každá množina splňující* $\lambda_N^*(A) = 0$ *je lebesgueovsky měřitelná.*

Důsledek (1 O lebesgueovské měřitelnosti intervalů v $\mathbb{R}^N$ Ds 15.3.11)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (2 O invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí V 15.3.13)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (3 O Lebesgueově míře roztažené množiny V 15.3.14)

Nechť $\alpha \in (0, \infty)$. Při α-násobném roztažení lebesgueovsky měřitelné množiny získáme lebesgueovsky měřitelnou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna α^N-násobku původní hodnoty.

14.3 Konstrukce Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^N$ V

Důsledek (1 O lebesgueovské měřitelnosti intervalů v $\mathbb{R}^N$ Ds 15.3.11)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (2 O invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí V 15.3.13)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (3 O Lebesgueově míře roztažené množiny V 15.3.14)

Nechť $\alpha \in (0, \infty)$. Při α-násobném roztažení lebesgueovsky měřitelné množiny získáme lebesgueovsky měřitelnou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna α^N-násobku původní hodnoty.

Důsledek (1 O lebesgueovské měřitelnosti intervalů v $\mathbb{R}^N$ Ds 15.3.11)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (2 O invariantnosti Lebesgueovy míry vůči posunutí V 15.3.13)

Libovolný interval $I \subset \mathbb{R}^N$ je lebesgueovsky měřitelný. Je-li navíc omezený, platí $\lambda_N(I) = \operatorname{vol} I$.

Důsledek (3 O Lebesgueově míře roztažené množiny V 15.3.14)

Nechť $\alpha \in (0, \infty)$. Při α-násobném roztažení lebesgueovsky měřitelné množiny získáme lebesgueovsky měřitelnou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna α^N-násobku původní hodnoty.

Věta (10 O vnější a vnitřní regularitě Lebesgueovy vnější míry V 15.3.18)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Pak

$$\lambda_N^*(A) = \inf\{\lambda_N(G) \colon A \subset G, G \textit{ je otevřená}\}.$$

Pokud navíc A je lebesgueovsky měřitelná, pak

$$\lambda_N(A) = \sup\{\lambda_N(K) \colon K \subset A, K \textit{ je kompaktní}\}.$$

Věta (11 Charakterizace lebesgueovské měřitelnosti množiny V 15.3.21)

Nechť $A \subset \mathbb{R}^N$. Pak následující výroky jsou ekvivalentní.
(i) *A je lebesgueovsky měřitelná*
(ii) *pro každý omezený otevřený interval $I \subset \mathbb{R}^N$ platí*

$$\lambda_N^*(I) = \lambda_N^*(I \cap A) + \lambda_N^*(I \setminus A)$$

(iii) *pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^N$ splňující $A \subset G$ a*

$$\lambda_N^*(G \setminus A) \leq \varepsilon$$

(iv) *existuje množina $D \subset \mathbb{R}^N$ typu G_δ splňující $A \subset D$ a $\lambda_N^*(D \setminus A) = 0$*
(v) *existují množiny $D \subset \mathbb{R}^N$ typu G_δ a H typu F_σ splňující $H \subset A \subset D$ a*

$$\lambda_N^*(D \setminus H) = 0.$$