# Matematika pro fyziky I

Milan Pokorný

Přednáška 13.10.2022

### Definice (1 $\sigma$-algebra D 15.2.1)

Nechť $X$ je množina a $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je *$\sigma$-algebra* na množině $X$, jestliže splňuje
(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{M}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{M}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

### Věta (1 O vlastnostech $\sigma$-algebry T 15.2.3)

*Nechť $\mathcal{M}$ je $\sigma$-algebra na množině $X$. Pak*
(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$
(ii) *jestliže $A, B \in \mathcal{M}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{M}$*
(iii) *jestliže $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^{m} A_j \in \mathcal{M}$*
(iv) *jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$*
(v) *jestliže $m \in \mathbb{N}$ a $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}$, pak $\bigcap_{j=1}^{m} A_j \in \mathcal{M}$.*

### Definice (1 $\sigma$-algebra D 15.2.1)

Nechť $X$ je množina a $\mathcal{M}$ je systém jejích podmnožin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ je *$\sigma$-algebra* na množině $X$, jestliže splňuje
(i) $X \in \mathcal{M}$
(ii) jestliže $A \in \mathcal{M}$, pak $X \setminus A \in \mathcal{M}$
(iii) jestliže $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, pak $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$.

### Věta (1 O vlastnostech $\sigma$-algebry T 15.2.3)

*Nechť $\mathcal{M}$ je $\sigma$-algebra na množině $X$. Pak*
(i) $\emptyset \in \mathcal{M}$
(ii) *jestliže* $A, B \in \mathcal{M}$, *pak* $A \setminus B \in \mathcal{M}$
(iii) *jestliže* $m \in \mathbb{N}$ *a* $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}$, *pak* $\bigcup_{j=1}^{m} A_j \in \mathcal{M}$
(iv) *jestliže* $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, *pak* $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$
(v) *jestliže* $m \in \mathbb{N}$ *a* $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}$, *pak* $\bigcap_{j=1}^{m} A_j \in \mathcal{M}$.

**Věta (2 O nejmenší $\sigma$-algebře V 15.2.5)**

*Je-li $X$ množina a $\mathcal{N}$ systém podmnožin $X$, pak na $X$ existuje jednoznačně daná nejmenší $\sigma$-algebra obsahující $\mathcal{N}$.*

**Definice (2 Borelovské množiny, množiny typu $F_\sigma$ a $G_\delta$ D 15.2.7)**

Nechť $(X, \varrho)$ je metrický prostor. Nejmenší $\sigma$-algebra obsahující systém otevřených podmnožin v $(X, \varrho)$ (existence a jednoznačnost plynou z předchozí věty) se nazývá *Borelova $\sigma$-algebra*, značí se $\mathcal{B}$ a v ní obsažené množiny se nazývají *borelovské množiny*.
O množině říkáme, že je typu $F_\sigma$, jestliže se dá zapsat jako nejvýše spočetné sjednocení uzavřených množin. O množině říkáme, že je typu $G_\delta$, jestliže se dá zapsat jako nejvýše spočetný průnik otevřených množin.

### Věta (2 O nejmenší $\sigma$-algebře V 15.2.5)

*Je-li $X$ množina a $\mathcal{N}$ systém podmnožin $X$, pak na $X$ existuje jednoznačně daná nejmenší $\sigma$-algebra obsahující $\mathcal{N}$.*

### Definice (2 Borelovské množiny, množiny typu $F_\sigma$ a $G_\delta$ D 15.2.7)

Nechť $(X, \varrho)$ je metrický prostor. Nejmenší $\sigma$-algebra obsahující systém otevřených podmnožin v $(X, \varrho)$ (existence a jednoznačnost plynou z předchozí věty) se nazývá *Borelova $\sigma$-algebra*, značí se $\mathcal{B}$ a v ní obsažené množiny se nazývají *borelovské množiny*.
O množině říkáme, že je typu $F_\sigma$, jestliže se dá zapsat jako nejvýše spočetné sjednocení uzavřených množin. O množině říkáme, že je typu $G_\delta$, jestliže se dá zapsat jako nejvýše spočetný průnik otevřených množin.

## 14.2 $\sigma$-algebry a míry III

### Definice (3 Míra D 15.2.9)

Nechť $X$ je množina a $\mathcal{M}$ je $\sigma$-algebra na $X$. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{M} \to [0,\infty]$ se nazývá *míra*, jestliže je $\sigma$-aditivní na $\mathcal{M}$ (jsou-li $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$). Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se pak nazývá *měřitelný prostor* (nebo *prostor s mírou*). Budeme vždy předpokládat, že existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \infty$.

### Definice (4 Důležité typy měr 1 D 15.2.12)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor. Míra $\mu$ se nazývá *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$. Míra $\mu$ se nazývá *$\sigma$-konečná*, jestliže $X$ lze napsat jako spočetné sjednocení množin z $\mathcal{M}$, které mají konečnou míru.

# 14.2 $\sigma$-algebry a míry III

## Definice (3 Míra D 15.2.9)

Nechť $X$ je množina a $\mathcal{M}$ je $\sigma$-algebra na $X$. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže je $\sigma$-aditivní na $\mathcal{M}$ (jsou-li $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$). Trojice $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se pak nazývá *měřitelný prostor* (nebo *prostor s mírou*). Budeme vždy předpokládat, že existuje $A \in \mathcal{M}$ tak, že $\mu(A) < \infty$.

## Definice (4 Důležité typy měr 1 D 15.2.12)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor. Míra $\mu$ se nazývá *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$. Míra $\mu$ se nazývá *$\sigma$-konečná*, jestliže $X$ lze napsat jako spočetné sjednocení množin z $\mathcal{M}$, které mají konečnou míru.

**Definice (5 Důležité typy měr 2 D 15.2.12)**

Míra $\mu$ se nazývá *pravděpodobnostní*, jestliže $\mu(X) = 1$.

**Definice (6 Úplná míra D 15.2.13)**

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor. Míra $\mu$ se nazývá *úplná*, jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{M}$ splňující $\mu(A) = 0$ platí

$$B \subset A \qquad \Longrightarrow \qquad B \in \mathcal{M}.$$

### Definice (5 Důležité typy měr 2 D 15.2.12)

Míra $\mu$ se nazývá *pravděpodobnostní*, jestliže $\mu(X) = 1$.

### Definice (6 Úplná míra D 15.2.13)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor. Míra $\mu$ se nazývá *úplná*, jestliže pro každou množinu $A \in \mathcal{M}$ splňující $\mu(A) = 0$ platí

$$B \subset A \qquad \Longrightarrow \qquad B \in \mathcal{M}.$$

## Věta (3 Základní vlastnosti míry V 15.2.16)

*Nechť* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor. Pak*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) $\mu$ *je konečně aditivní (pokud jsou* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ *po dvou disjunktní, pak* $\mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$*)*
(iii) $\mu$ *je monotonní (pokud* $A, B \in \mathcal{M}$ *a* $A \subset B$*, pak* $\mu(A) \leq \mu(B)$*)*
(iv) $\mu$ *je* $\sigma$*-subaditivní (pokud* $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$*, pak* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ *a* $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$*)*
(v) *pokud* $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ *a* $A_1 \subset A_2 \subset \dots$*, pak* $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ *a*

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$$

(vi) *pokud* $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$*,* $\mu(A_1) < \infty$ *a* $A_1 \supset A_2 \supset \dots$*, pak* $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ *a*

$$\mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

## Věta (4 O zúplnění míry V 15.2.18)

*Nechť* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu}$ *jsou jako výše. Pak* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *je* $\sigma$*-algebra obsahující* $\mathcal{M}$ *a* $\widetilde{\mu}$ *je úplná míra na* $\widetilde{\mathcal{M}}$*, která je na* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *dobře definovaná (každé množině z* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *je jednoznačně přiřazeno číslo z* $[0, \infty]$*) a na* $\mathcal{M}$ *se shoduje s* $\mu$*.*

## Definice (7 Vlastnost platící skoro všude D 15.2.19)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $M \in \mathcal{M}$. Nechť $P$ je výroková funkce definovaná na $M$. Řekneme, že $P$ platí *skoro všude* na $M$ (nebo platí pro *skoro všechna* $x \in M$), jestliže existuje $N \in \mathcal{M}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a výrok $P(x)$ platí pro každé $x \in M \setminus N$. V případě, že $M = X$, stručně říkáme, že výrok platí skoro všude. Termíny „skoro všude" a „skoro všechna" se obvykle zkracují na „s.v.".

## Věta (4 O zúplnění míry V 15.2.18)

*Nechť* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu}$ *jsou jako výše. Pak* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *je* $\sigma$*-algebra obsahující* $\mathcal{M}$ *a* $\widetilde{\mu}$ *je úplná míra na* $\widetilde{\mathcal{M}}$*, která je na* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *dobře definovaná (každé množině z* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *je jednoznačně přiřazeno číslo z* $[0, \infty]$*) a na* $\mathcal{M}$ *se shoduje s* $\mu$*.*

## Definice (7 Vlastnost platící skoro všude D 15.2.19)

Nechť $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je měřitelný prostor a $M \in \mathcal{M}$. Nechť $P$ je výroková funkce definovaná na $M$. Řekneme, že $P$ platí *skoro všude* na $M$ (nebo platí pro *skoro všechna* $x \in M$), jestliže existuje $N \in \mathcal{M}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a výrok $P(x)$ platí pro každé $x \in M \setminus N$. V případě, že $M = X$, stručně říkáme, že výrok platí skoro všude. Termíny „skoro všude“ a „skoro všechna“ se obvykle zkracují na „s.v.“.