Fourierovy řady

Ortogonální polynomy

1. Ukažte, že Hermitovy polynomy (ortogonální v $L^2_{\mathrm{e}^{-x^2}}(\mathbb{R})$)

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

   řeší rovnici

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \quad \text{(resp. } \left(y'\mathrm{e}^{-x^2}\right)' = -2n\mathrm{e}^{-x^2} y).$$

   Ukažte, že platí

$$xH_n(x) = nH_{n-1}(x) + \frac{1}{2}H_{n+1}(x)$$
$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

2. Ukažte, že Laguerrovy polynomy (ortogonální v $L^2_{\mathrm{e}^{-x}}((0,\infty))$)

$$L_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \mathrm{e}^{-x})$$

   řeší rovnici

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \quad \text{(resp. } \left(y' x \mathrm{e}^{-x}\right)' = -n\mathrm{e}^{-x} y).$$

   Ukažte, že

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k.$$

3. Ukažte, že Čebyševovy polynomy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ (ortogonální v $L^2_{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}((-1,1))$) řeší rovnici

$$\left(y'\sqrt{1-x^2}\right)' = -n^2 \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Rozviňte $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ na $(-1,1)$ do Čebyševových polynomů (tj. na $L^2_{1/\sqrt{1-x^2}}(-1,1)$).

5. Ukažte, že Legendreovy polynomy (ortogonální v $L^2((-1,1))$)
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$$
řeší rovnici
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad \text{(resp. } \Big(y'(1-x^2)\Big)' = -n(n+1)y).$$

6. Rozviňte $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ na $(-1,1)$ do Legendreových polynomů (tj. na $L^2(-1,1)$).

7. Kulová plocha poloměru a je rozdělena „rovníkem" na dvě polokoule. Na povrchu horní polokoule je konstantní potenciál $+V$, na povrchu dolní polokoule je potenciál $-V$. Určete elektrostatický potenciál vně i uvnitř koule.

8. Ukažte, že přidružené Legendreovy polynomy
$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x),$$
$m = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l$, $l \in \mathbb{N}_0$, řeší rovnici
$$\Big(y'(1-x^2)\Big)' + \Big(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)y = 0.$$

9. Dokažte, že platí
$$\int_{-1}^{1} P_{l'}^m P_l^m \,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{l,l'}.$$

10. Dokažte, že sférické funkce
$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \Big(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\Big)^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\vartheta)\mathrm{e}^{im\varphi}$$
splňují
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\overline{Y}_{lm}(\vartheta,\varphi)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$