(1) Za předpokladu, že existuje

(6b) $\min\limits_{y \in M} \int_0^\pi (y')^2\,dx$, $M = \{u \in C^1([0,\pi]),\ u(0)=u(\pi)=0,\ \int_0^\pi u^2\,dx = 1\}$

Určete minimum, nalezněte vektor nebo funkci, pro kterou se nabývá.

Návod: Použijte Lagrangeovy multiplikátory a nalezněte vektory podezřelé body. Porovnejte vlastní funkce a vyberte z množiny celých nalezených těchto fcí, na které se hodnota funkcionálu nejmenší.

Řešení

Pomocí Lagrangeových multiplikátorů dostáváme

1b $\quad y'' + \lambda y = 0 \quad$ na $[0,\pi]$

$y(0) = y(\pi) = 0$

netriviální řešení dostáváme pouze pro $\lambda = n \in \mathbb{N}$ } 1b

$y_n(x) = C_n \sin(nx)$

$s^2 = 1 - c^2 = 1 - \frac{1+c2}{2} = \frac{1-c2}{2}$

Vazební podmínka dává $\int_0^\pi C_n^2 \sin^2(nx)\,dx = C_n^2 \int_0^\pi \frac{1-\cos(2nx)}{2}\,dx = \pi \frac{C_n^2}{2} = 1$ } 1b

$\Rightarrow C_n^2 = \frac{2}{\pi} \Rightarrow C_n = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

Podezřelé fce $y_n = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \quad n \in \mathbb{N}$. 0,5b

Σ 2

Σ 1,5

Pro ně je

$\int_0^\pi (y_n')^2\,dx = \int_0^\pi 2 \cdot n^2 \cos^2(nx)\,dx = 2n^2 \int_0^\pi \frac{1+\cos(2nx)}{2}\,dx = n^2\pi$ 1b

0,5b

Nejmenší hodnota je tedy π $\left(\min\limits_{y \in M} \int_0^\pi (y')^2\,dx = \pi\right)$ a nabývá se pro funkce $\underline{y_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x}$ $x \in [0,\pi]$. Σ 2,5

1b

(2) Nalezněte bodovou limitu posloupnosti funkcí

6,5 $\quad f_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$ na $\mathbb{R}$.

Poté rozhodněte stejnoměrnou resp. lokálně stejnoměrnou konvergenci na $[0,\infty)$ resp. $(0,\infty)$

Řešení

Zřejmě $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx}{n\sqrt{\frac{1}{n^2}+x^2}}$ $\begin{cases} \to \frac{x}{|x|} & x\neq 0 \\ \to 0 & x=0 \end{cases}$ 1,5

Tedy $\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} \xrightarrow{\mathbb{R}} \operatorname{sign} x$.

Proto vůbec nemůže platit stejnoměrná konvergence na $[0,\infty)$ (limitní funkce je zde nespojitá). 0,5

Pokud budeme uvažovat $(0,\infty)$, pak zřejmě

$$\left(1-\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right)' = -\frac{n}{\sqrt{1+n^2x^2}} + \frac{nx\cdot\frac{1}{2}2xn^2}{(1+n^2x^2)^{3/2}} = \frac{-n(1+n^2x^2)+n^3x^2}{(1+n^2x^2)^{3/2}} = \frac{-n}{(1+n^2x^2)^{3/2}} < 0 \quad 1b$$

Tedy ~~posloupnost~~ je každý člen posloupnosti je monotónní a proto

$$\sup_{(0,\infty)} \left(1-\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right) = \lim_{x\to0+}\left(1-\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right) = 1, \quad 1b$$

tedy stejnoměrná konvergence na $(0,\infty)$ také neplatí. 0,5b

Konečně, pokud vezmeme $\delta>0$ a množinu interval $[\delta,+\infty)$, je

$$\sup_{[\delta,+\infty)} \left(1-\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right) = 1-\frac{n\delta}{\sqrt{1+n^2\delta^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-1=0 \quad 1b$$

Proto $\left(1-\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}\right) \overset{loc}{\underset{(0,\infty)}{\rightrightarrows}} 0$, neboli $\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} \overset{loc}{\underset{(0,\infty)}{\rightrightarrows}} 1$. 0,5b

Tedy $\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}} \to \operatorname{sign} x$ na $\mathbb{R}$, $\overset{loc}{\underset{(0,\infty)}{\rightrightarrows}}$ 0,5b

ale není stejnoměrná na $(0,\infty)$ (a tedy ani na $[0,\infty)$)

③ Pro které hodnoty $a,b \geq 0$ konverguje integrál

(8b)

$$\varphi(a,b) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x(1+b^2x^2)}\,dx \quad ?$$

Pro tyto hodnoty integrál spočítejte pomocí derivace integrálu (argumentu po) dle vhodného parametru.

Nápověda: Pozor na situaci $a=b$

Řešení

Integrál zřejmě konverguje pro $b>0$, $a\geq 0$ ($b=0$, $a>0$ problém v ∞) } 1b

$a=0$, $b\geq 0$.

Zřejmě lze pro $b>0$ $a\geq 0$ derivovat dle parametru a } 2b

(vše OK, jež je potřeba dominující majoranta / derivace)

$\frac{1}{1+a^2x^2}\,\frac{1}{1+b^2x^2} \leq \frac{1}{1+b^2x^2}$ $\quad a\geq 0$ (dokonce $\forall a\in\mathbb{R}$) $\quad \varphi(0,b)=0$

$$\frac{\partial}{\partial a}\varphi(a,b) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)}\,dx$$ 0,5b

Zřejmě je výsledek rozdílný pro $a=b$ a $a\neq b$. Protože původní integrál je zřejmě pro $b>0$ spojitý v a, stačí uvažovat $a\neq b$ a pak ze spojitosti dostat $a=b$! 0,5b

Proto

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2}\,\frac{1}{1+b^2x^2}\,dx = \int_0^\infty\left(\frac{A}{1+a^2x^2}+\frac{B}{1+b^2x^2}\right)dx$$ 0,5b

$A(1+b^2x^2)+B(1+a^2x^2)=1$

$A+B=1 \Rightarrow A=1-B$

$Ab^2+Ba^2=0$

$$= \int_0^\infty \frac{-a^2}{b^2-a^2}\,\frac{1}{1+a^2x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{b^2}{b^2-a^2}\cdot\frac{1}{1+b^2x^2}\,dx$$ 0,5b

$b^2+B(a^2-b^2)=0 \Rightarrow B=\frac{b^2}{b^2-a^2}$

$A=\frac{-a^2}{b^2-a^2}$ } 1b

$$= -\frac{a^2}{b^2-a^2}\,\frac{1}{a}\left[\operatorname{arctg} ax\right]_0^\infty + \frac{b^2}{b^2-a^2}\,\frac{1}{b}\left[\operatorname{arctg} bx\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{b^2-a^2}-\frac{a}{b^2-a^2}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{a+b}$$ 0,5b

Proto $\varphi(a,b) = \frac{\pi}{2}\ln(a+b) + C$ $\qquad \varphi(0,b)=0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{2}\ln b$ } 1b

$\varphi(a,b) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a+b}{b}$ $\qquad a>0,\ b>0$ $\quad$ 0,5b

$= 0$ $\qquad a=0,\ b\geq 0$

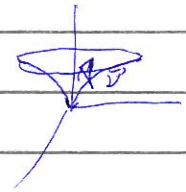
(4) Spočítejte tok pole $\vec F = (x, y, 1)$ přes plochu Π zadanou

(2,5) $z = x^{2/3} + y^{2/3}$, $x^{2/3} + y^{2/3} \le 1$

orientovanou tak, že směr normály ~~míří ven~~ má z-ovou souřadnici kladnou.

Připomenutí: Tok pole přes plochu Π je dán vztahem $\int_\Pi \vec F \cdot \vec\nu \, dS$.

Řešení



Popis plochy lze provést v kartézských souřadnicích

0,5 $\vec\varphi(x,y) = (x, y, x^{2/3} + y^{2/3})$

Proto

1,5 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = (1, 0, \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}) \end{array} \right.$

0,5 0,5

Proto normálový vektor (nejspíš vnější směr) je $\pm\left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}, -1\right)$, ale chceme opačný směr $\Rightarrow$ $\vec\nu = \dfrac{\left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}, 1\right)}{\left\|\left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}, -1\right)\right\|}$ 0,5

Proto

$$\int_\Pi F \cdot \vec\nu \, dS = \int_{x^{2/3} + y^{2/3} \le 1} \left(-\frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}} + 1\right) dx\, dy \quad 0{,}5$$

Zde je vhodné přejít do „zobecněných polárních souřadnic“

$x = r \cos^3 \varphi$, $y = r \sin^3 \varphi$ 0,5 $\Rightarrow$ $J = \left|\det \begin{pmatrix} 3r \cos^2\varphi \sin\varphi & \cos^3\varphi \\ +3r \sin^2\varphi \cos\varphi & \sin^3\varphi \end{pmatrix}\right| = 3r(\cos^2\varphi \sin^4\varphi + \sin^2\varphi \cos^4\varphi)$

$= 3r \cos^2\varphi \sin^2\varphi$ } 1,5

a uvažovat jen $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ – ze symetrie pak vzít 4x

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(-\frac{2}{3} r^{\frac{2}{3}} + 1\right) 3r \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, dr\, d\varphi \quad 0{,}5$$

$$= 12 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi \int_0^1 \left(r - \frac{2}{3} r^{\frac{5}{3}}\right) dr \quad 0{,}5$$

$$= 12 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(1 + \cos 4\varphi)\right) d\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) = 3 \cdot \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16}\pi$$

0,5 0,5