

Počtení část zkoušky 17.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Nalezněte maximální řešení úlohy

$$y'' + 16y = \frac{16}{\cos(4x)}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

2. (7b) V závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci mocninné řady, včetně kružnice konvergence

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2^k k!}{(2k+1)!!} \right)^p z^k,$$

kde $(2k+1)!! = (2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$. Pokud používáte nějaké kritérium konvergence řady nebo nějakou větu, vysvětlete.

3. (7b) Uvažujte funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0. \end{cases}$$

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ zjistěte, zda funkce f v bodě $(0, 0)$

- a) je spojitá
- b) má parciální derivace
- c) má spojitě parciální derivace
- d) má totální diferenciál.

4. (7b) Nalezněte maximální a minimální hodnotu (pokud existují) funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + 2y + 2z$$

množině $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Nalezněte též body (pokud existují), ve kterých se tyto extrémy nabývají.

Teoretická část zkoušky 17.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (i) Definujte pojem číselná řada.
(ii) Definujte pojmy konvergentní/divergentní a oscilující číselná řada.
(iii) Definujte pojmy absolutně a neabsolutně konvergentní číselná řada.
(iv) Ukažte, že je-li řada absolutně konvergentní, pak je též konvergentní.
(v) Formulujte a dokažte Abelovo a Dirichletovo kritérium konvergence číselných řad.

2. (7b) (i) Definujte pojmy izolovaný a hromadný bod množiny, derivace množiny.
(ii) Definujte pojmy vnější, vnitřní a hraniční bod množiny.
(iii) Ukažte, že

$$\partial A \setminus A = A' \setminus A \quad \text{a} \quad \partial A \cup A = A' \cup A = \bar{A}.$$

- (iv) Ukažte, že

$$A = \bar{A} \iff \partial A \subset A \iff A' \subset A.$$

3. (8b) (i) Formulujte Větu o implicitní funkci (základní verzi).
(ii) Formulujte a dokažte Větu o derivaci implicitní funkce.
(iii) Definujte pojem totální diferenciál funkce.
(iv) Definujte pojem potenciál vektorového pole.
(v) Definujte ODR ve tvaru totálního diferenciálu a formulujte a dokažte Větu o jednoznačnosti řešení příslušné úlohy.