Početní část zkoušky 10.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (6b) Pomocí metody integračního faktoru převeďte rovnici na rovnici ve tvaru totálního diferenciálu a řešte úlohu
$$\frac{y}{x} + (y^3 - \ln x)y' = 0, \qquad y(1) = 1.$$
Nápověda: Integrační faktor hledejte ve tvaru $\mu = \mu(y)$.

2. (6b) Pro které hodnoty parametrů p, $q > 0$ a $a \in \mathbb{R}$ konverguje, diverguje nebo osciluje číselná řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{q(q+1)\dots(q+n-1)}\right)^a ?$$
Pokud používáte nějaké kritérium konvergence řady nebo nějakou větu, vysvětlete.

3. (8b) Ověřte, že předpisy
$$\mathrm{e}^{\frac{u}{x}} \cos\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$
$$\mathrm{e}^{\frac{u}{x}} \sin\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}}$$
definují na jistém okolí bodu $x = y = 1$, $u = 0$, $v = \frac{\pi}{4}$ hladké funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$. Spočtěte $\mathrm{d}u(1, 1)$ a $\mathrm{d}v(1, 1)$.

4. (7b) Nalezněte lokální extrémy (pokud existují) funkce
$$f(x, y, z) = xyz + \frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$$
na $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \vee y = 0 \vee z = 0\}$.

   Nalezněte též body (pokud existují), ve kterých se tyto extrémy nabývají. Nabývá funkce na této množině svých globálních extrémů? Vysvětlete.

Teoretická část zkoušky 10.6.2022

Jméno:

Skupina:

1. (8b) (i) Definujte pojem mocninná řada.
   (ii) Formulujte větu o poloměru konvergence mocninné řady.
   (iii) Ukažte, že mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.
   (iv) Ukažte, že uvnitř kruhu konvergence lze mocninnou řadu derivovat člen po členu a takto formálně derivovaná mocninná řada konverguje k derivaci mocninné řady.
   (v) Ukažte, že mocninná řada má uvnitř kruhu konvergence derivace všech řádů.

2. (7b) (i) Definujte pojmy norma a lineární normovaný vektorový prostor.
   (ii) Definujte pojmy skalární součin a unitární prostor (vektorový prostor se skalárním součinem).
   (iii) Formulujte a dokažte Cauchy–Schwarzovu nerovnost.
   (iv) Ukažte, že každý unitární prostor lze při vhodné volbě normy chápat jako lineární normovaný vektorový prostor.

3. (8b) (i) Formulujte a dokažte Větu o implicitní funkci (základní verzi).
   (ii) Definujte pojem potenciál vektorového pole.
   (iii) Definujte pojmy souvislá množina a oblast.
   (iv) Dokažte, že pokud má vektorové pole na oblasti potenciál, je dán jednoznačně až na aditivní konstantu.