(27.6.)

(1) Nađi rješenje jednadžbe

(6b) $3y' + 2xy = 2x\, y^{-2} e^{-2x^2}$

Solucija a) $y(0) = -1$ b) $y(0) = 1$

Rješenje

Jednadžba je Bernoullijeva, kada

$3y'y^2 + 2xy^3 = 2x\, e^{-2x^2}$ 1b

$z = y^3$, $z' = 3y^2y'$ 1b

$z' + 2xz = 2x e^{-2x^2} \quad / e^{+x^2}$

$(ze^{x^2})' = 2x e^{-x^2}$

$(ze^{x^2})' = (-e^{-x^2})'$

$ze^{x^2} = -e^{-x^2} + C$

$z = -e^{-2x^2} + Ce^{-x^2}$ 2b

a) $z(0) = y^3(0) = -1 \Rightarrow -1 = -1 + C \Rightarrow C = 0$

$z(x) = -e^{-2x^2}$

$y(x) = -e^{-\frac{2}{3}x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ 1b

b) $z(0) = 1 \Rightarrow 1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$

$z(x) = 2e^{-x^2} - e^{-2x^2}$

$y(x) = \sqrt[3]{2e^{-x^2} - e^{-2x^2}}$ $x \in \mathbb{R}$ 1b

(27.6)

(2) V závislosti na parametrech $p, q \in \mathbb{R}$ vyšetřete (absolutní) konvergenci řady

(6b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^p}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^q}\right)}\right)}.$$

Řešení: pro $p \geq 0,\ q \geq 0$ je $\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^p} \approx \frac{1}{n^p} \\ \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^q}} \approx n^{+q}\end{array}\right\}$ 1b

pro $p<0,\ q<0$ je $\left.\begin{array}{l}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^p} \\ \text{a } \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^q}}\end{array}\right\}$ omezená monotonní 1b

Proto máme pro $p \geq 0,\ q \geq 0$

$$\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^p}}{\ln\left(1+\frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^q}\right)}\right)} \approx \frac{1}{n^p \ln(1+n^q)} \approx \frac{1}{q n^p \ln(1+n)} \quad \text{pro } n\to\infty$$ 1b

Z integrálního kritéria řada K pro $p>1$ 0.5b

(pro $p=1$ $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverguje, neboť $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = [\ln \ln x]_2^{\infty} = +\infty$) 0.5b

$p<1$ tím spíše. Pro $p>1,\ q<0$ též konverguje, $\approx \frac{1}{n^p C}$

Pro $p<0$ řada diverguje (jde o řadu s nezápornými členy, které buď nemají nulovou limitu – $q<0$, nebo mají, ale dělí se jen $\ln n$, což na konvergenci nestačí) 1b

Závěr: Řada K pro $p>1,\ q \in \mathbb{R}$
D pro $p \leq 1,\ q \in \mathbb{R}$. 1b

2/7.6

3

7b

Ověřte, že ~~funk~~ rovnice

$$e^{ux}\cos\frac{v}{y^2} = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$
$$e^{ux}\sin\frac{v}{y^2} = \frac{y^2}{\sqrt{2}}$$

definují na okolí bodu $x=y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$ ~~fu~~ hladké funkce $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$. Spočtěte $du(1,1)$ a $dv(1,1)$.

Řešení

- zjistíme dosazením bodu platnost rovnosti ($\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$)
- vyšetříme na okolí daného bodu počty fce hladké
-

$$\frac{\partial F_1}{\partial u}(1,1,0,\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial u}(1,1,0,\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial v}(1,1,0,\tfrac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial v}(1,1,0,\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \neq 0$$

2b

$\Rightarrow$ Funkce $u=u(x,y)$ a $v=v(x,y)$ lze na okolí $(1,1,0,\frac{\pi}{4})$ definovat a tyto funkce jsou hladké!

Spočítejme
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 0 \cancel{+} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\underline{\frac{\partial u}{\partial x} = 1} \qquad \underline{\frac{\partial v}{\partial x} = -1}$$

2b

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{4}\cdot(-2) = 0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(-2) - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\sqrt{2}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$\underline{\frac{\partial u}{\partial y} = 1} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right)\frac{2}{\sqrt{2}} = \underline{1 + \frac{\pi}{2}}$$

2b

$$\boxed{\begin{aligned} du(1,1)\vec{h} &= h_1 + h_2 \\ dv(1,1)\vec{h} &= -1h_1 + \left(1+\frac{\pi}{2}\right)h_2 \end{aligned}}$$

1b

(27.6.)

(4) Nalezněte a klasifikujte lokální extrémy funkce $(a,b>0)$

(8b) $$f(x,y) = xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

na množině $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$. Jsou tyto extrémy globálními extrémy na množině $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$?

Řešení

Fce je na dané otevřené množině spojitá, proto lok. extrémy (pokud ∃) se nabývají v bodech, kde $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Tedy 1b

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} + \frac{xy}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\cdot\frac{-2x}{a^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} + 2\cdot\frac{xy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\cdot\frac{(-y)}{b^2}$$ 1b

Proto
$$0 = y\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{x^2y}{a^2}$$ 0,5b
$$0 = x\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{y^2x}{b^2}$$

a) $y=0 \Rightarrow x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=0$ $[0,0]$ $[\pm a,0]$ 0,5b

b) $x=0 \Rightarrow y\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=0$ $[0,0]$ $[0,\pm b]$

To ale nejsou body otevřené, body $x=0$ resp. $y=0$ nemohou být lok. extrémy (v lib. okolí jsou body s kladnou a zápornou hodnotou fce!) 0,5b

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}, \quad \frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \quad \text{tj.} \quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$$ 0,5b

Platí tedy buď $\frac{x}{a}=\pm\frac{y}{b}$

Proto $3\frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{a}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 1b

Platí tedy buď (z symetrie řešení ± kde je obr. druhý)

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\qquad \frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 0,5b

Protože a) $f(x,y)$ nabývá na uzávěru elipsy maxima i minima

b) $f(x,y)=0$ na množině $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

c) body $\left[\pm\frac{\sqrt{3}}{3}a, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}b\right]$ leží uvnitř elipsy

a $f\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}, b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$ $\quad f\left(-a\frac{\sqrt{3}}{3}, -b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$ a $f\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}, -b\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-a\frac{\sqrt{3}}{3}, b\frac{\sqrt{3}}{3}\right)<0$ 2,5b

Jsou nutně nalezeny body globálních i lokálních extrémů a platí, že v bodech $\left(a\frac{\sqrt3}{3}, b\frac{\sqrt3}{3}\right)$, $\left(-a\frac{\sqrt3}{3}, -b\frac{\sqrt3}{3}\right)$ nabývá fce lokální maxima (hodnota je $\frac{ab}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{ab}{3\sqrt3}$) a v bodech $\left(a\frac{\sqrt3}{3}, -b\frac{\sqrt3}{3}\right)$; $\left(-a\frac{\sqrt3}{3}, b\frac{\sqrt3}{3}\right)$ nabývá fce lokální minima (hodnota je $-\frac{ab}{3\sqrt3}$). 1b

Alternativa: zdlouhavý výpočet druhých derivací (1,5b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-\frac{3xy}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{\frac{x^3 y}{a^4}}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-\frac{3xy}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{\frac{y^3 x}{b^4}}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{\frac{y^2}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} - \frac{\frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{3/2}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a\sqrt3}(-3-1) & -\frac{2\sqrt3}{3} \\ -\frac{2\sqrt3}{3} & \frac{a}{b\sqrt3}(-3-1) \end{pmatrix}$$

$D_1 < 0$ (lokální maxima)

$D_2 > 0$

analogicky $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ (lokální minima).