(6.6.) všechny (maximální)

(1) Nalezněte řešení ODR

(83) $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$

splňující a) $y(0)=0$ b) $y(0)=\frac{1}{2}$ c) $y(0)=-\frac{1}{2}$ d) $y(0)=1$

Řešení

Máme mez. jediná řešení $y \equiv \pm 1$ 0,5, jinak

$\int \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \dfrac{dx}{1+x^2}$ 0,5

$\Downarrow$

$\arcsin y = \operatorname{arctg} x + C$

$\boxed{y = \sin(\operatorname{arctg} x + C)}$ 0,5

ale pozor, jinak bez napojení, jelikož $y' \geq 0 \Rightarrow y$ musí být neklesající!

ad a) $y(0)=0 \Rightarrow 0 = \sin C \Rightarrow C = 0$ (posunutí o násobek 2π nic nemění, o lichý π nemusí vůbec!)

a) $y = \sin(\operatorname{arctg} x)$ $x \in \mathbb{R}$ 1b

b) $y(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin C \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}$ (posun o násobek 2π)

ale pozor, pro $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{3}$ 0,5b (tj. $x=\sqrt{3}$) je $y(\sqrt{3}) = 1$ a nenapojuje se (vlastně 1. derivací) na $y=1$ — je třeba pokračovat po této větvi

tj.

b) $y(x) = \sin(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{6})$ $x \in (-\infty, \sqrt{3})$ 1b

$y(x) = 1$ $x \in [\sqrt{3}, +\infty)$

c) $y(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \sin C \Rightarrow C = -\frac{\pi}{6}$ 0,5b

Analogicky jako výše

$y(x) = -1$ $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$

$y(x) = \sin(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{6})$ $x \in [-\sqrt{3}, +\infty)$ 1b

d) $y = 1$ pro $x \geq 0$ 0,5

ale ne tato řešení se dají napojit hladce 0,5 pro $x \leq 0$.

Proto

$y(x) = 1 \qquad x \in (-\alpha, +\infty) \qquad \alpha \geq 0$

$y(x) = \cancel{\operatorname{arctg}}\ \sin(\operatorname{arctg} x + \beta) \qquad x \in (-\infty, -\alpha]$ 1

přičemž $\operatorname{arctg}(-\alpha) + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad \beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$

včetně situace $y(x) \equiv 1 \quad x \in \mathbb{R}$. 0,5

(2) (6.6)

75 Vyšetřete konvergenci mocninné řady, včetně hranice konvergence v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \operatorname{arctg}\left(\frac{(-1)^k}{k^p}\right) \cdot \frac{1}{\ln^2(k+1)}.$$

Řešení

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k \operatorname{arctg}\left(\frac{(-1)^k}{k^p}\right) \frac{1}{\ln^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^k \operatorname{arctg}(k^{-p}) \frac{1}{\ln^2(k+1)}$$

a) $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\operatorname{arctg}(k^{-p}) \frac{1}{\ln^2(k+1)}} = 1 \Rightarrow R = 1$ 1

Tedy řada K pro $|z|<1$, diverguje pro $|z|>1$ 0,5

b) $|z| = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{i\varphi k} \operatorname{arctg}(k^{-p}) \frac{1}{\ln^2(k+1)}$$

1

$(-1)^k e^{i\varphi k} = e^{i(\varphi+\pi)k} \Rightarrow \varphi \in (-\pi, \pi)$

(i) $\varphi \in (-\pi,\pi)$

$\operatorname{arctg}(k^{-p}) \frac{1}{\ln^2(k+1)} \downarrow 0$ od jistého k_0

(zřejmé pro $p \geq 0$; pro $p<0$ je arctg omezená, navíc $\frac{1}{\ln^2(k+1)} \downarrow 0$ – případně lze argumentovat i místo Abela a Dirichleta) 1

$\Rightarrow$ Řada K $\forall p \in \mathbb{R}$ 0,5

(ii) $\varphi = \pi$ 0,5

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(k^{-p}) \frac{1}{\ln^2(k+1)}$$

0,5

$p \geq 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} k^{-p} \approx \frac{1}{k^p}$

0,5

$p>1$ – řada K srovnáním s $\frac{1}{k^p}$

1

$p=1$ $\frac{1}{k} \frac{1}{\ln^2(k+1)}$ K – $\int_2^{\infty} \frac{1}{z \ln^2 z} \, dz$ K + srovnání

0,5

Závěr: Mocninná řada K pro $|z|<1$ $\forall p \in \mathbb{R}$, diverg. pro $|z|>1$ $\forall p$, pro $|z|=1$, $z \neq -1$ K $\forall p \in \mathbb{R}$, pro $z=-1$ K pro $p \geq 1$.

③ Vyšetřete fci

15

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x\,(1-\cos y)}{(x^4+y^4)^\alpha \ln(x^2+y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Určete v závislosti na parametru α, kdy

a) f je spojitá v $(0,0)$

b) f má v $(0,0)$ parciální derivace

c) f má v $(0,0)$ spojité parciální der.

d) f má v $(0,0)$ totální diferenciál.

Řešení

a) Spojitost: $\sin x \sim x \Rightarrow$; $1-\cos y \sim y^2$; máme chování v $(0,0)$ $\left|\dfrac{x^2y^2}{(x^4+y^4)^\alpha \ln(x^2+y^2)}\right| \leq \dfrac{c(x^4+y^4)}{(x^4+y^4)^\alpha\,|\ln(x^2+y^2)|}$ 1

$\rightarrow 0$ pro $\boxed{\alpha \leq 1}$ (Totéž lze ověřit vyrobením 4 polárních souř.)

Tedy f je v $(0,0)$ spojitá pro $\alpha \leq 1$. 0,5

b) Parciální derivace – existují $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0} = 0$$, analogicky $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. 1

c) Spojitost:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\sin x\cos x\,(1-\cos y)}{(x^4+y^4)^\alpha \ln(x^2+y^2)} + \frac{4\alpha x^3 \sin^2 x\,(1-\cos y)}{(x^4+y^4)^{\alpha+1} \ln(x^2+y^2)} - \frac{2x\cdot\sin^2 x\,(1-\cos y)}{(x^4+y^4)^\alpha \ln^2(x^2+y^2)}\,\frac{1}{x^2+y^2}$$ 1

$$\sim \frac{xy^2}{(x^4+y^4)^\alpha \ln(x^2+y^2)} + \frac{x^5y^2}{(x^4+y^4)^{\alpha+1} \ln(x^2+y^2)} + \frac{x^3y^2}{(x^4+y^4)^\alpha \ln^2(x^2+y^2)}\,\frac{1}{x^2+y^2}$$ 1

a vše se chová stejně

$$\frac{r^3}{r^{4\alpha}\ln r} \Rightarrow 3 \geq 4\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \leq \frac{3}{4}}$$ zaručuje spojitost derivací 1

d) Totální diferenciál

z definice $\left(df(0,0)\vec{h} = \vec{0}\cdot\vec{h} \right)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0,0)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h_1 \,(1-\cos h_2)}{(h_1^4+h_2^4)^{\alpha+\frac{1}{4}} \ln(h_1^2+h_2^4)}$$ 0,5

(nadeo užij normy jsou ekvivalent, podle $\|h\| = (h_1^4+h_2^4)^{1/4}$)

$$\Rightarrow \sim \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_1^4+h_2^4)^{\alpha+\frac{1}{4}}} \; \& \; \frac{1}{\ln(h_1^2+h_2^4)} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \frac{1}{4} \leq 1$$

$$\boxed{\alpha \leq \frac{1}{4}}$$ 1

(4) Nalezněte a klasifikujte lokální extrémy funkce

(53) $f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$

Nalezněte lokální body, ve kterých se nabývá extrému (pokud ∃).

Řešení

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y + 2z \Rightarrow \underline{y = -2z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x - 1 + 3y^2 \qquad z - 1 + 3(4z^2) = 0 \qquad 12z^2 + z - 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{24} = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \quad 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x + 2z \Rightarrow \underline{x = -z}$$

1,5

$x_1 = -\frac{1}{4} \qquad x_2 = +\frac{1}{3}$

$y_1 = -\frac{1}{2} \qquad y_2 = \frac{2}{3}$

$$\left.\begin{aligned} \left[-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right] &= A_1 \\ \left[+\tfrac{1}{3}, +\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right] &= A_2 \end{aligned}\right\} 0{,}5$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 4 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= 2 & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 2 \end{aligned}\right\} 1$$

$$A_1: \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 4$

$D_2 = -13$

$D_3 \; -26 + 12 = -14$ 0,5

$\Rightarrow$ indef. není extrém

$$A_2: \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 4$

$D_2 = 15$

$D_3 = 30 - 16 = 14$ 0,5

poz. def.

v $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right]$ má fce lok. minimum. 0,5

$$\left(f_{min} = \cancel{\frac{2}{9} + \frac{2}{9}} - \frac{2}{9} - \frac{6}{9} + \frac{8}{27} + \frac{1}{9} = \frac{8-21}{27} = \underline{-\frac{13}{27}} \right)$$