23.5.

1 Nalezněte řešení ODR

75

$$y' \cdot x^2 = x^2 + xy + y^2$$

splňující

a) $y(0)=1$ b) $y(1)=1$.

Okomentujte výsledek!

Řešení

Jedná se o rovnici homogenní, řešení hledáme ve tvaru

$$y(x) = x \cdot z(x) \quad 1$$

$$y'(x) = x z'(x) + z(x) \quad 0{,}5$$

$$x z'(x) + \cancel{z(x)} = 1 + \cancel{z(x)} + z^2(x) \quad 0{,}5$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x} \quad 1$$

$$\operatorname{arctg} z = \ln x + C = \ln(Kx)$$

$$z = \operatorname{tg}(\ln(Kx))$$

$$\boxed{y(x) = x \cdot \operatorname{tg}(\ln(Kx))} \quad 1 \qquad x \in \left(\frac{1}{K} e^{-\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{K} e^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

a) $y(0)=1$ nemá řešení 1

DŮVOD: $x^2 y'$ ... LS není definován, když máme zavést substituci, podělením vznikne problém $x=0$! 0,5

b) $y(1)=1 \Rightarrow 1 = \operatorname{tg}(\ln K) \Rightarrow \ln K = \frac{\pi}{4}$ $\quad K = e^{\frac{\pi}{4}}$

$$x \in \left(e^{-\frac{3}{4}\pi}, e^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\boxed{y(x) = x \operatorname{tg}\left(\ln\left(e^{\frac{\pi}{4}} x\right)\right)} \quad 1$$

Zde $\exists$ má řešení (definiční hodnoty, ale nemohou na celém $\mathbb{R}$!) 0,5

(2) V odvisnosti od parametrov $p, q \in \mathbb{R}$ razsodite o konvergenci / divergenci številske vrste

(65)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+2)\cdots(p+2n-2)}{(2n)!!} \, \frac{1}{(n+1)^q},$$

kjer $(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 2$.

Rešitev

Dovolj je aplikacija Gaussovega kriterija na ta red [1]

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{p(p+2)\cdots(p+2n-2)}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)\cdot(2n)!!}{(p+2n)\cdot(p+2n-2)\cdots p} \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^q \quad 1$$

$$= \frac{2n+2}{p+2n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^q = \left(1+\frac{q}{n+1}+\frac{c_n}{(1+n)^2}\right)\left(1+\frac{2-p}{p+2n}\right) \quad 1$$

$$= 1 + \frac{q}{n} + \frac{2-p}{2n} + \frac{K_n}{n^2} \quad 1 \qquad |K_n| \le C \quad n \in \mathbb{N} \quad 1$$

Tej številske vrste konvergirajo $\Leftrightarrow$

$$q + 1 - \frac{p}{2} > 1 \quad 1$$

(divergira $\Leftrightarrow$ $q + 1 - \frac{p}{2} \le 1$).

RSJ

(3) Nalezněte

$\max_M \; x^3+y^3+z^3$ a $\min_M \; x^3+y^3+z^3$,

7b

kde $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. Nalezněte též body (kolik jich je), kde se extrémy nabývají.

Řešení

$F(x) = x^3+y^3+z^3$ je spojitá na M, M je kompaktní $\Rightarrow$ F nabývá na M svého maxima a minima 1

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2$ $\Rightarrow$ jediný podezřelý bod lokálního extrému je v bodě $[0,0,0]$, což není vnitřní (ani lokální) extrém 1

$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2$

Použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů

$$G(x) = x^3+y^3+z^3 - \lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

$3x^2 - 2\lambda x = 0 \qquad x(3x-2\lambda)=0$ 1

$3y^2 - 2\lambda y = 0 \qquad y(3y-2\lambda)=0$

$3z^2 - 2\lambda z = 0 \qquad z(3z-2\lambda)=0$

$\wedge \; x^2+y^2+z^2=1$

Možnosti $[0,0,0]$ ... ne 0,5

1 bod je nenulový, 2 nulové $\Rightarrow$ $[\pm 1, 0, 0]$ a symetrické 0,5

2 body nenulové, 1 nulový $\Rightarrow$ $x=y\neq 0,\ z=0$ 0,5

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ z=0$

$[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0]$ a symetrické

3 body nenulové $\Rightarrow$ $x=y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,5

$F(\pm 1,0,0) = \pm 1$

$F(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1

$F(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Teda $\max\limits_{\Omega} F(x,y,z) = 1$

$\min\limits_{\Omega} F(x,y,z) = -1$

a nadobúdajú sa v bodoch $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ $(0,0,1)$

$(-1,0,0)$ $(0,-1,0)$ $(0,0,-1)$.

1

(4) Vaje s podpisi

(15) $\ln^2(xyz) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$x^2+2z+\ln\left(\frac{x^2+1}{z^2+1}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right) = 0$$

določata v okolici točke T(1,1,1) funkciji $y=y(x)$ in $z=z(x)$. Izračunaj $\frac{dy}{dx}(1)$ in $\frac{dz}{dx}(1)$!

Rešitev

Trojica $x=y=z=1$ je rešitev sistema. 0,5 Vse funkcije so v okolici točke (1,1,1) gladke. Izrek o implicitni funkciji 0,5

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y,z) = \ln^2(xyz) + \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\right) - \frac{\pi}{4} \\ F_2(x,y,z) = x^2+2z+\ln\left(\frac{x^2+1}{z^2+1}\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+y+z)\right) \end{array}\right\} 0{,}5$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(1,1,1) = 0 + \frac{1}{1+\left(\frac{2x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2}\cdot\left.\frac{x^2+y^2+z^2 - 2y(2x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right|_{(1,1,1)} \quad 0{,}5$$

$$= \frac{-4}{2\cdot 16} = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(1,1,1) = 0 + \frac{1}{1+\left(\frac{2x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2}\cdot\left.\frac{(x^2+y^2+z^2) - 4z(2x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right|_{(1,1,1)} \quad 0{,}5$$

$$= \frac{-12}{2\cdot 16} = -\frac{3}{8} \quad 0{,}5$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(1,1,1) = 2 - \frac{1}{1+z^2}\cdot 2z - \underbrace{3\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}}_{0} = 2-1 = +1 \quad 0{,}25$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = (1,1,1) = \left.-3\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}\right|_{(1)} = 0 \quad 0{,}5$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$$ je regularna matrika 0,5

$\Rightarrow$ na okolí bodu [1,1] lze dolů definovat fce

$y = y(x)$

$z = z(x)$.

0,5

Výpočet derivací:

$$0 + \frac{1}{1+(\ )^2} \cdot \frac{2(x^2+y^2+2z^2) - 2x(2x+y+1)}{(x^2+y^2+2z^2)^2}$$

$$+ 0 \cdot \frac{dy}{dx} + 0 \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{1+(\ )^2} \cdot \left(\frac{x^2+y^2+2z^2 - 2y(2x+y+1)}{(\ )^2} \frac{dy}{dx} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2+y^2+2z^2 - 4z(2x+y+z)}{(\ )^2} \frac{dz}{dx} \right) = 0$$

$$0 = -\frac{1}{8}\frac{dy}{dx} - \frac{3}{8}\frac{dz}{dx}$$

0,5

$$2x + \frac{2x}{1+x^2}\Big|_{(x=1)} - 3\cos\frac{\pi}{2} + 0 \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$$

0,5

$$\boxed{\frac{dz(1)}{dx} = -3} \qquad \boxed{\frac{dy(1)}{dx} = +9}$$

1,5