# Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 19.5.2022

# Aplikace variačního počtu v klasické mechanice I

## Věta (1 Lagrangeovy rovnice V 13.5.1)

*Pohyb systému $N$ hmotných bodů v potenciálním poli $U = U\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right)$ se shoduje se stacionárními body funkcionálu akce*

$$E\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}, \{\dot{x}_i\}_{i=1}^{3N}\right) \mathrm{d}t,$$

*kde $L = T - U$, $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2$ je kinetická energie a $U\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right)$ je potenciální energie, přičemž $U \in C^1(\mathbb{R}^{3N})$. Pohyb je popsán systémem obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu*

$$(m_i \dot{x}_i)^{\cdot} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 3N.$$

## Lemma (3 L 13.5.5)

*Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'' > 0$ na $\mathbb{R}$. Potom její Legendreova transformace je (striktně) konvexní funkce na $\mathbb{R}$, přičemž dvakrát provedená Legendreova transformace na $f$ je opět $f$.*

# Aplikace variačního počtu v klasické mechanice I

## Věta (1 Lagrangeovy rovnice V 13.5.1)

*Pohyb systému $N$ hmotných bodů v potenciálním poli $U = U\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right)$ se shoduje se stacionárními body funkcionálu akce*

$$E\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}, \{\dot{x}_i\}_{i=1}^{3N}\right) \mathrm{d}t,$$

*kde $L = T - U$, $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2$ je kinetická energie a $U\left(\{x_i\}_{i=1}^{3N}\right)$ je potenciální energie, přičemž $U \in C^1(\mathbb{R}^{3N})$. Pohyb je popsán systémem obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu*

$$(m_i \dot{x}_i)^{\cdot} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 3N.$$

## Lemma (3 L 13.5.5)

*Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'' > 0$ na $\mathbb{R}$. Potom její Legendreova transformace je (striktně) konvexní funkce na $\mathbb{R}$, přičemž dvakrát provedená Legendreova transformace na $f$ je opět $f$.*

# Aplikace variačního počtu v klasické mechanice II

## Lemma (4 O charakterizaci konvexity funkcí více proměnných L 13.3.25, V 13.3.27)

*Nechť* $g \in C^1(G)$*, kde* $G \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená konvexní množina. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*
(i) $g$ *je konvexní na* $G$
(ii) $g(y) - g(x) \geq \nabla g(x) \cdot (y - x)$ *pro všechna* $x, y \in G$
(iii) $(\nabla g(y) - \nabla g(x)) \cdot (y - x) \geq 0$ *pro všechna* $x, y \in G$*. Je-li navíc* $g \in C^2(G)$*, potom je navíc ekvivalentní ještě podmínka*
(iv) $g$ *má pozitivně semidefinitní Hessovu matici.*

## Lemma (5 L 13.5.5)

*Nechť* $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ *je pozitivně definitní kvadratická forma pro všechna* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*. Nechť* $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$*. Potom je její Legendreova transformace konvexní funkce na* $\mathbb{R}^n$*, přičemž dvakrát provedená Legendreova transformace na* $f$ *je opět* $f$*.*

## Lemma (4 O charakterizaci konvexity funkcí více proměnných L 13.3.25, V 13.3.27)

*Nechť* $g \in C^1(G)$, *kde* $G \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená konvexní množina. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*
(i) $g$ *je konvexní na* $G$
(ii) $g(y) - g(x) \geq \nabla g(x) \cdot (y - x)$ *pro všechna* $x, y \in G$
(iii) $(\nabla g(y) - \nabla g(x)) \cdot (y - x) \geq 0$ *pro všechna* $x, y \in G$. *Je-li navíc* $g \in C^2(G)$, *potom je navíc ekvivalentní ještě podmínka*
(iv) $g$ *má pozitivně semidefinitní Hessovu matici.*

## Lemma (5 L 13.5.5)

*Nechť* $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$ *je pozitivně definitní kvadratická forma pro všechna* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. *Nechť* $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. *Potom je její Legendreova transformace konvexní funkce na* $\mathbb{R}^n$, *přičemž dvakrát provedená Legendreova transformace na* $f$ *je opět* $f$.

## Aplikace variačního počtu v klasické mechanice III

### Věta (13 Hamiltonovy rovnice V 13.5.7)

*Za daných předpokladů, tedy pro* $L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}})$ *třídy* $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, *konvexní v posledních n proměnných, jsou Lagrangeovy rovnice ekvivalentní s Hamiltonovými rovnicemi*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

*kde* $i = 1, 2, \ldots, n$, *a hamiltonián je dán předpisem*

$$H(t, \vec{p}, \vec{q}) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}),$$

*přičemž* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.