Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 18.5.2022

Věta (5 Euler–Lagrangeova rovnice V 13.2.4)

Nechť $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ. Pak funkce

$$x \mapsto L_z(x, y_0(x), y_0'(x))$$

je spojitě diferencovatelná na $[a, b]$ a y_0 splňuje Euler–Lagrangeovu rovnici

$$L_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_z(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \qquad \text{na } [a, b].$$

Věta (6 O regularitě minimizéru V 13.2.6)

Nechť $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ a $x_0 \in (a, b)$ je takové, že

$$L_{zz}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) \neq 0.$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $y_0 \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

12.3.1 Euler–Lagrangeova rovnice II

Věta (5 Euler–Lagrangeova rovnice V 13.2.4)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ. Pak funkce

$$x \mapsto L_z(x, y_0(x), y_0'(x))$$

je spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a y_0 splňuje Euler–Lagrangeovu rovnici

$$L_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_z(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \qquad \text{na } [a,b].$$

Věta (6 O regularitě minimizéru V 13.2.6)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ a $x_0 \in (a,b)$ je takové, že

$$L_{zz}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) \neq 0.$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $y_0 \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

12.3.3 Nutné a postačující podmínky existence extrémů funkcionálů reprezentovaných integrálem I

Věta (7 Lagrangeova nutná podmínka pro integrální funkcionál V 13.3.14)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je bodem lokálního minima funkcionálu Φ. Pak

$$L_{zz}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \qquad \text{na } [a,b].$$

Věta (8 Lagrangeova postačující podmínka pro integrální funkcionál V 13.3.16)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $h \in X$ splňující $\|h\|_{C^1([a,b])} \leq \delta$ má funkce

$$\varphi(t) := \Phi(y_0 + th)$$

vlastnost

$$\varphi''(t) \geq 0 \qquad \text{pro } t \in (0,1),$$

pak Φ má v bodě y_0 lokální minimum. V případě, že předchozí vlastnost platí s ostrou nerovností, jedná se o ostré lokální minimum.

12.3.3 Nutné a postačující podmínky existence extrémů funkcionálů reprezentovaných integrálem I

Věta (7 Lagrangeova nutná podmínka pro integrální funkcionál V 13.3.14)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je bodem lokálního minima funkcionálu Φ. Pak

$$L_{zz}(x, y_0(x), y_0'(x)) \geq 0 \qquad \text{na } [a,b].$$

Věta (8 Lagrangeova postačující podmínka pro integrální funkcionál V 13.3.16)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ. Jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $h \in X$ splňující $\|h\|_{C^1([a,b])} \leq \delta$ má funkce

$$\varphi(t) := \Phi(y_0 + th)$$

vlastnost

$$\varphi''(t) \geq 0 \qquad \text{pro } t \in (0,1),$$

pak Φ má v bodě y_0 lokální minimum. V případě, že předchozí vlastnost platí s ostrou nerovností, jedná se o ostré lokální minimum.

12.3.3 Nutné a postačující podmínky existence extrémů funkcionálů reprezentovaných integrálem II

Věta (9 Legendreova postačující podmínka V 13.3.15)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ. Jestliže existují $\alpha, \delta > 0$ taková, že

$$\delta^2 F(u_0; h, h) \geq \alpha \|h\|^2_{C^1([a,b])} \qquad \text{pro všechna } h \in X \text{ splňující } \|h\|_{C^1([a,b])} \leq \delta,$$

pak Φ má v bodě y_0 ostré lokální minimum.

12.3.4 Konjugované body a Jacobiho rovnice I

Definice (6 Jacobiho rovnice, konjugovaný bod D 13.3.17)

Diferenciální rovnici

$$-(Ph')' + Qh = 0$$

nazýváme *Jacobiho pomocnou rovnicí* odpovídající funkcionálu $h \mapsto \delta^2 F(u_0; h, h)$. Bod $x \in (a, b]$ se nazývá *konjugovaný* k bodu a, jestliže existuje netriviální řešení Jacobiho pomocné rovnice splňující $h(a) = h(x) = 0$.

Věta (10 Jacobiho věta V 13.3.19)

Nechť $L \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, $y_0 \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ, platí

$$L_{zz}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0 \qquad \text{na } [a, b]$$

a P, Q jsou jako výše.
(i) *Nechť na intervalu $(a, b]$ neexistuje konjugovaný bod k bodu a. Pak y_0 je bodem lokálního minima funkcionálu Φ na M.*
(ii) *Nechť y_0 je bodem lokálního minima funkcionálu Φ na M. Pak na intervalu (a, b) neexistuje konjugovaný bod k bodu a.*

12.3.4 Konjugované body a Jacobiho rovnice I

Definice (6 Jacobiho rovnice, konjugovaný bod D 13.3.17)

Diferenciální rovnici

$$-(Ph')' + Qh = 0$$

nazýváme *Jacobiho pomocnou rovnicí* odpovídající funkcionálu $h \mapsto \delta^2 F(u_0; h, h)$. Bod $x \in (a, b]$ se nazývá *konjugovaný* k bodu a, jestliže existuje netriviální řešení Jacobiho pomocné rovnice splňující $h(a) = h(x) = 0$.

Věta (10 Jacobiho věta V 13.3.19)

Nechť $L \in C^3([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, $y_0 \in M \cap C^2([a, b])$ je stacionárním bodem funkcionálu Φ, platí

$$L_{zz}(x, y_0(x), y_0'(x)) > 0 \qquad \text{na } [a, b]$$

a P, Q jsou jako výše.
(i) *Nechť na intervalu $(a, b]$ neexistuje konjugovaný bod k bodu a. Pak y_0 je bodem lokálního minima funkcionálu Φ na M.*
(ii) *Nechť y_0 je bodem lokálního minima funkcionálu Φ na M. Pak na intervalu (a, b) neexistuje konjugovaný bod k bodu a.*

12.3.5 Vázané extrémy I

Věta (11 O Lagrangeových multiplikátorech 13.3.24)

Nechť $L, g \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *a* $y_0 \in M$ *je minimizérem funkcionálu*

$$\Phi(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) \, \mathrm{d}x$$

vzhledem k množině $\{y \in M\colon G(y) = \gamma\}$, *kde*

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) \, \mathrm{d}x.$$

Nechť $\mathrm{d}\Psi(y_0) \not\equiv 0$ *(existuje* $h \in X$ *splňující* $\mathrm{d}\Psi(y_0)(h) \neq 0$*). Pak existuje* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$\mathrm{d}F(y_0)(h) - \lambda \mathrm{d}\Psi(y_0)(h) = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in X_0,$$

neboli na $[a,b]$ *platí*

$$L_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \lambda g_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(L_z(x, y_0(x), y_0'(x)) - \lambda g_z(x, y_0(x), y_0'(x))\Big) = 0$$

(výraz na posledním řádku lze rozderivovat pomocí řetízkového pravidla opět až při dodatečném předpokladu $y_0 \in C^2((a,b))$*).*