Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 12.5.2022

Definice (1 Funkcionál D 13.1.2)

Zobrazení z normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$ se nazývá *funkcionál*.

Definice (2 Gateauxův a Fréchetův diferenciál D 13.2.1)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál a $a \in D_F$.
(i) Nechť $h \in X$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\{a + th\colon |t| < \delta\} \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Gateauxův diferenciál* ve směru h (nebo též *Gateauxovu derivaci* ve směru h), jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(a+th) - F(a)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(a+th)|_{t=0}.$$

Tuto limitu pak značíme $\delta F(a; h)$ a nazýváme ji *Gateauxovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a ve směru h.
(ii) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(a) \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Fréchetův diferenciál*, jestliže existuje spojitý lineární funkcionál $L\colon X \to \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Lh}{\|h\|_X} = 0.$$

Zmíněný lineární funkcionál pak značíme $\mathrm{d}F(a)$ a nazýváme jej *Fréchetovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a.

Definice (1 Funkcionál D 13.1.2)

Zobrazení z normovaného lineárního prostoru do $\mathbb{R}$ se nazývá *funkcionál*.

Definice (2 Gateauxův a Fréchetův diferenciál D 13.2.1)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál a $a \in D_F$.
(i) Nechť $h \in X$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $\{a + th\colon |t| < \delta\} \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Gateauxův diferenciál* ve směru h (nebo též *Gateauxovu derivaci* ve směru h), jestliže existuje vlastní limita

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(a + th) - F(a)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(a + th)|_{t=0}.$$

Tuto limitu pak značíme $\delta F(a; h)$ a nazýváme ji *Gateauxovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a ve směru h.
(ii) Nechť existuje $\delta > 0$ takové, že $\mathcal{U}_\delta(a) \subset D_F$. Řekneme, že F má v bodě a *Fréchetův diferenciál*, jestliže existuje spojitý lineární funkcionál $L\colon X \to \mathbb{R}$ splňující

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a + h) - F(a) - Lh}{\|h\|_X} = 0.$$

Zmíněný lineární funkcionál pak značíme $\mathrm{d}F(a)$ a nazýváme jej *Fréchetovým diferenciálem* funkcionálu F v bodě a.

Definice (3 Lokální minimum D 13.2.5)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *bodem lokálního minima* funkcionálu F, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$F(a) \leq F(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap D_F.$$

V případě ostré nerovnosti na $\mathcal{P}_\varepsilon(a) \cap D_F$ hovoříme o ostrém lokálním minimu. Analogicky se definuje lokální maximum.

Definice (4 Stacionární bod D 13.2.6)

Nechť X je normovaný lineární prostor a nechť $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *stacionárním bodem* (nebo *kritickým bodem*) funkcionálu F, jestliže

$$\delta F(a; h) = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in X.$$

Definice (3 Lokální minimum D 13.2.5)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *bodem lokálního minima* funkcionálu F, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$F(a) \leq F(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap D_F.$$

V případě ostré nerovnosti na $\mathcal{P}_\varepsilon(a) \cap D_F$ hovoříme o ostrém lokálním minimu. Analogicky se definuje lokální maximum.

Definice (4 Stacionární bod D 13.2.6)

Nechť X je normovaný lineární prostor a nechť $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že $a \in D_F$ je *stacionárním bodem* (nebo *kritickým bodem*) funkcionálu F, jestliže

$$\delta F(a; h) = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in X.$$

Věta (1 Eulerova nutná podmínka V 13.2.7)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální extrém v bodě $a \in X$, je definován na nějakém okolí bodu a a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta F(a; h)$, pak $\delta F(a; h) = 0$.

Definice (5 Druhý Gateauxův diferenciál D 13.2.10)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál, $a, h, k \in X$ a existuje $\delta F(a; h)$. Nechť existuje vlastní

$$\delta^2 F(a; h, k) := \lim_{t \to 0} \frac{\delta F(a + tk; h) - \delta F(a; h)}{t}.$$

Pak $\delta^2 F(a; h, k)$ nazýváme *druhým Gateauxovým diferenciálem* ve směrech h a k.

Věta (1 Eulerova nutná podmínka V 13.2.7)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální extrém v bodě $a \in X$, je definován na nějakém okolí bodu a a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta F(a; h)$, pak $\delta F(a; h) = 0$.

Definice (5 Druhý Gateauxův diferenciál D 13.2.10)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál, $a, h, k \in X$ a existuje $\delta F(a; h)$. Nechť existuje vlastní

$$\delta^2 F(a; h, k) := \lim_{t\to 0} \frac{\delta F(a + tk; h) - \delta F(a; h)}{t}.$$

Pak $\delta^2 F(a; h, k)$ nazýváme *druhým Gateauxovým diferenciálem* ve směrech h a k.

Věta (2 Lagrangeova nutná podmínka V 13.2.12)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální minimum v bodě $a \in X$ a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta^2 F(a; h, h)$, pak $\delta^2 F(a; h, h) \geq 0$.

Věta (3 Lagrangeova postačující podmínka (zeslabená verze) V 13.2.4)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $a \in X$ je stacionárním bodem funkcionálu $F\colon X \to \mathbb{R}$. Jestliže existuje okolí bodu a, kde platí $\delta^2 F(x; h, h) \geq 0$ pro všechna $h \in X$, pak F má v bodě a lokální minimum.

12.2 Abstraktní teorie IV

Věta (2 Lagrangeova nutná podmínka V 13.2.12)

Nechť X je normovaný lineární prostor, funkcionál $F\colon X \to \mathbb{R}$ má lokální minimum v bodě $a \in X$ a nechť $h \in X$. Pokud existuje $\delta^2 F(a; h, h)$, pak $\delta^2 F(a; h, h) \geq 0$.

Věta (3 Lagrangeova postačující podmínka (zeslabená verze) V 13.2.4)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $a \in X$ je stacionárním bodem funkcionálu $F\colon X \to \mathbb{R}$. Jestliže existuje okolí bodu a, kde platí $\delta^2 F(x; h, h) \geq 0$ pro všechna $h \in X$, pak F má v bodě a lokální minimum.

Definice (6 Konvexita funkcionálu D 13.2.18)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $M \subset X$ je konvexní a $F\colon X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že funkcionál F je *konvexní* na M, jestliže

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \qquad \text{pro všechna } x, y \in M \text{ a } \lambda \in [0,1].$$

Věta (4 Postačující podmínka minima pro konvexní funkcionál V 13.2.19)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $F\colon X \to \mathbb{R}$ je konvexní funkcionál definovaný na celém X. Pak každý jeho stacionární bod je bodem globálního minima F na X.

Definice (6 Konvexita funkcionálu D 13.2.18)

Nechť X je normovaný lineární prostor, $M \subset X$ je konvexní a $F: X \to \mathbb{R}$ je funkcionál. Řekneme, že funkcionál F je *konvexní* na M, jestliže

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \qquad \text{pro všechna } x, y \in M \text{ a } \lambda \in [0,1].$$

Věta (4 Postačující podmínka minima pro konvexní funkcionál V 13.2.19)

Nechť X je normovaný lineární prostor a $F: X \to \mathbb{R}$ je konvexní funkcionál definovaný na celém X. Pak každý jeho stacionární bod je bodem globálního minima F na X.

12.3 Funkcionály reprezentované integrálem
12.3.1 Euler–Lagrangeova rovnice I

Lemma (1 Du Bois-Reymondovo lemma L 13.3.2)

Nechť pro funkci $g \in C([a,b])$ platí

$$\int_a^b g h' \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in C^1([a,b]) \text{ splňující } h(a) = h(b) = 0.$$

Pak je g konstantní na $[a,b]$.

Lemma (2 Fundamentální lemma variačního počtu L 13.2.3)

Nechť pro funkci $g \in C([a,b])$ platí

$$\int_a^b g h \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro všechna } h \in C^1([a,b]) \text{ splňující } h(a) = h(b) = 0.$$

Pak $g \equiv 0$ na $[a,b]$.

Lemma (1 Du Bois-Reymondovo lemma L 13.3.2)

Nechť pro funkci $g \in C([a,b])$ platí

$$\int_a^b g h' \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \textit{pro všechna } h \in C^1([a,b]) \textit{ splňující } h(a) = h(b) = 0.$$

Pak je g konstantní na $[a,b]$.

Lemma (2 Fundamentální lemma variačního počtu L 13.2.3)

Nechť pro funkci $g \in C([a,b])$ platí

$$\int_a^b g h \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \textit{pro všechna } h \in C^1([a,b]) \textit{ splňující } h(a) = h(b) = 0.$$

Pak $g \equiv 0$ na $[a,b]$.

12.3.1 Euler–Lagrangeova rovnice II

Věta (5 Euler–Lagrangeova rovnice V 13.2.4)

Nechť $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$ a $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu F. Pak funkce

$$x \mapsto L_z(x, y_0(x), y_0'(x))$$

je spojitě diferencovatelná na $[a, b]$ a y_0 splňuje Euler–Lagrangeovu rovnici

$$L_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_z(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \qquad \text{na } [a, b].$$

Věta (6 O regularitě minimizéru V 13.2.6)

Nechť $L \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$, $y_0 \in M$ je stacionárním bodem funkcionálu F a $x_0 \in (a, b)$ je takové, že

$$L_{zz}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) \neq 0.$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $y_0 \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

12.3.1 Euler–Lagrangeova rovnice II

Věta (5 Euler–Lagrangeova rovnice V 13.2.4)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ *a* $y_0 \in M$ *je stacionárním bodem funkcionálu* F*. Pak funkce*

$$x \mapsto L_z(x, y_0(x), y_0'(x))$$

je spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ *a* y_0 *splňuje Euler–Lagrangeovu rovnici*

$$L_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_z(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0 \qquad \text{na } [a,b].$$

Věta (6 O regularitě minimizéru V 13.2.6)

Nechť $L \in C^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$*,* $y_0 \in M$ *je stacionárním bodem funkcionálu* F *a* $x_0 \in (a,b)$ *je takové, že*

$$L_{zz}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) \neq 0.$$

Pak existuje $\delta > 0$ *takové, že* $y_0 \in C^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$*.*