Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 4.5.2022

Definice (14 Lokální extrémy D 12.6.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že f má v bodě $a \in M$ *lokální maximum* vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) \leq f(a) \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(a) \cap M.$$

Lokální minimum se definuje analogicky. Ostré lokální maximum a minimum definujeme pomocí ostrých nerovností a prstencových okolí.

Věta (18 Nutná podmínka pro lokální extrém V 12.6.2)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$, $a \in M$ je vnitřní bod množiny M a $i \in \{1, \dots, N\}$. Má-li f v bodě a lokální extrém (vzhledem k M) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

11.6 Lokální extrémy funkcí více proměnných I

Definice (14 Lokální extrémy D 12.6.1)

Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že f má v bodě $a \in M$ *lokální maximum* vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) \leq f(a) \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(a) \cap M.$$

Lokální minimum se definuje analogicky. Ostré lokální maximum a minimum definujeme pomocí ostrých nerovností a prstencových okolí.

Věta (18 Nutná podmínka pro lokální extrém V 12.6.2)

Nechť $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$, $a \in M$ je vnitřní bod množiny M a $i \in \{1, \dots, N\}$. Má-li f v bodě a lokální extrém (vzhledem k M) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Definice (15 Klasifikace kvadratických forem D 12.6.3)

Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice typu $N \times N$ a $Q\colon \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ je jí odpovídající kvadratická forma, tedy

$$Q(\mathbf{h}) = (\mathbb{A}\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} h_i h_j \qquad \text{pro všechna } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N.$$

Tato kvadratická forma se nazývá

- *pozitivně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) > 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *negativně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) < 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \geq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *negativně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \leq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *indefinitní*, jestliže existují $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ taková, že $Q(\mathbf{h}) < 0 < Q(\mathbf{l})$.

Lemma (1 L 12.6.7)

Kvadratická forma Q je pozitivně definitní právě tehdy, když existuje $\alpha > 0$ splňující $Q(\mathbf{h}) \geq \alpha \|\mathbf{h}\|^2$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$.

Definice (15 Klasifikace kvadratických forem D 12.6.3)

Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice typu $N \times N$ a $Q\colon \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ je jí odpovídající kvadratická forma, tedy

$$Q(\mathbf{h}) = (\mathbb{A}\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} h_i h_j \qquad \text{pro všechna } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N.$$

Tato kvadratická forma se nazývá

- *pozitivně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) > 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *negativně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) < 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \geq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *negativně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \leq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *indefinitní*, jestliže existují $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ taková, že $Q(\mathbf{h}) < 0 < Q(\mathbf{l})$.

Lemma (1 L 12.6.7)

Kvadratická forma Q je pozitivně definitní právě tehdy, když existuje $\alpha > 0$ splňující $Q(\mathbf{h}) \geq \alpha \|\mathbf{h}\|^2$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$.

11.6 Lokální extrémy funkcí více proměnných III

Věta (19 Postačující podmínka pro lokální extrém V 12.6.9)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$ je stacionární bod funkce f a existuje $\delta > 0$ takové, že $f \in C^2(\mathcal{U}_\delta(a))$. Definujme kvadratickou formu $Q\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ předpisem

$$Q(\mathbf{h}) := \mathrm{d}^2 f(a)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j.$$

Je-li Q pozitivně definitní, f má v bodě a ostré lokální minimum.
Je-li Q negativně definitní, f má v bodě a ostré lokální maximum.
Je-li Q indefinitní, f nemá v bodě a lokální extrém.

11.7 Globální extrémy funkcí více proměnných I

Věta (20 Existence globálních extrémů T 12.7.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na $M \subset \mathbb{R}^N$.
(i) *Je-li M omezená a uzavřená, f zde nabývá svého maxima a minima.*
(ii) *Je-li $M = \mathbb{R}^N$ a $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, f zde nabývá svého minima. Podobně pro maximum.*
(iii) *Je-li $M = \mathbb{R}^N$, $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$ a existuje bod, v němž má f zápornou hodnotu, pak na M nabývá svého minima. Podobně pro maximum.*

Věta (21 O Lagrangeových multiplikátorech V 12.7.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $m \in \mathbb{N}$, $m < N$ a $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(\Omega)$. Označme

$$M := \{x \in \Omega\colon g_i(x) = 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Nechť matice $\left\{\frac{\partial g_i(a)}{\partial x_j}\right\}_{i=1,j=1}^{m,N}$ má hodnost rovnu m. Jestliže f má v $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(a).$$

11.7 Globální extrémy funkcí více proměnných I

Věta (20 Existence globálních extrémů T 12.7.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je spojitá na $M \subset \mathbb{R}^N$.
(i) *Je-li M omezená a uzavřená, f zde nabývá svého maxima a minima.*
(ii) *Je-li $M = \mathbb{R}^N$ a $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, f zde nabývá svého minima. Podobně pro maximum.*
(iii) *Je-li $M = \mathbb{R}^N$, $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$ a existuje bod, v němž má f zápornou hodnotu, pak na M nabývá svého minima. Podobně pro maximum.*

Věta (21 O Lagrangeových multiplikátorech V 12.7.7)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $m \in \mathbb{N}$, $m < N$ a $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(\Omega)$. Označme

$$M := \{x \in \Omega\colon g_i(x) = 0 \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Nechť matice $\left\{\frac{\partial g_i(a)}{\partial x_j}\right\}_{i=1,j=1}^{m,N}$ má hodnost rovnu m. Jestliže f má v $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(a).$$

11.8 Věta o regulárním zobrazení I

Definice (16 Regulární zobrazení D 12.8.2)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že $\mathbf{f}$ je *regulární zobrazení* na Ω, jestliže

(i) množina Ω je otevřená

(ii) $\mathbf{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$

(iii) $\mathrm{J}_{\mathbf{f}} \neq 0$ na Ω.

Věta (22 O inverzi (lokální verze) V 12.8.5)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je regulární zobrazení na $\mathcal{U}_\tau(a)$ pro jistá $a \in \mathbb{R}^N$ a $\tau > 0$. Pak existuje $\sigma > 0$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $\mathbf{f}$ *je prosté na* $\mathcal{U}_\sigma(a)$

(ii) $\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a))$ *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^N$ *(s jakoukoliv normou)*

(iii) *značí-li* φ *inverzní zobrazení k* $\mathbf{f}|_{\mathcal{U}_\sigma(a)}$, *pak* $\varphi \in C^1(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$

(iv) $\mathrm{J}_\varphi(\mathbf{f}(x)) = \frac{1}{\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathcal{U}_\sigma(a)$

(v) *pokud* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *a* $\mathbf{f} \in C^k(\mathcal{U}_\tau(a); \mathbb{R}^N)$, *pak* $\varphi \in C^k(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$.

11.8 Věta o regulárním zobrazení I

Definice (16 Regulární zobrazení D 12.8.2)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že $\mathbf{f}$ je *regulární zobrazení* na Ω, jestliže

(i) množina Ω je otevřená

(ii) $\mathbf{f} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$

(iii) $\mathrm{J}_{\mathbf{f}} \neq 0$ na Ω.

Věta (22 O inverzi (lokální verze) V 12.8.5)

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je regulární zobrazení na $\mathcal{U}_\tau(a)$ pro jistá $a \in \mathbb{R}^N$ a $\tau > 0$. Pak existuje $\sigma > 0$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $\mathbf{f}$ *je prosté na* $\mathcal{U}_\sigma(a)$

(ii) $\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a))$ *je otevřená množina v* $\mathbb{R}^N$ *(s jakoukoliv normou)*

(iii) *značí-li φ inverzní zobrazení k $\mathbf{f}|_{\mathcal{U}_\sigma(a)}$, pak $\varphi \in C^1(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$*

(iv) $\mathrm{J}_\varphi(\mathbf{f}(x)) = \frac{1}{\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(x)}$ *pro všechna* $x \in \mathcal{U}_\sigma(a)$

(v) *pokud $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a $\mathbf{f} \in C^k(\mathcal{U}_\tau(a); \mathbb{R}^N)$, pak $\varphi \in C^k(\mathbf{f}(\mathcal{U}_\sigma(a)); \mathbb{R}^N)$.*