Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 28.4.2022

11.4 Věta o implicitní funkci II

Věta (16 O implicitní funkci V 12.4.14)

Nechť $N, m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\vec{F} \colon \mathbb{R}^{N+m} \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^m$. *Nechť*

(i) $\vec{F}(a,b) = (0,\dots,0)$

(ii) *existuje okolí bodu* (a,b), *kde všechny složky zobrazení* $\vec{F}$ *jsou třídy* C^k

(iii)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Pak existují $\delta, \Delta > 0$ *taková, že pro každé* $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ *existuje právě jedno* $y_x \in \mathcal{U}_\Delta(b)$ *splňující* $\vec{F}(x, y_x) = (0,\dots,0)$ *a pro zobrazení* $\vec{\varphi} \colon x \mapsto y_x$ *platí, že* $\vec{\varphi} \in C^k(\mathcal{U}_\delta(a); \mathbb{R}^m)$.

11.5 Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu I

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{1}$$

Definice (13 Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu D 12.5.1)

Rovnici (1) nazveme *rovnicí ve tvaru totálního diferenciálu* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jestliže existuje $U\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takové, že levá strana rovnice (1) je totálním diferenciálem funkce U na Ω, neboli pro všechna $(x,y) \in \Omega$ a $(h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathrm{d}U(x,y)(h_1,h_2) = M(x,y)h_1 + N(x,y)h_2.$$

Funkci U v takovém případě nazýváme *potenciálem* rovnice (1).

11.5 Rovnice ve tvaru totálního diferenciálu II

Věta (17 O řešení rovnice ve tvaru totálního diferenciálu V 12.5.2)

Nechť U je potenciálem rovnice (1) *na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $M, N \in C(\Omega)$ a $N \neq 0$ na Ω. Pak každým bodem $(x_0, y_0) \in \Omega$ prochází právě jedno řešení rovnice*

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

a je implicitně dáno vztahem

$$U(x,y) = U(x_0, y_0).$$

Pokud $M \neq 0$ na Ω, platí analogický výsledek pro rovnici

$$M(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + N(x,y) = 0.$$

Definice (14 Lokální extrémy D 12.6.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že f má v bodě $a \in M$ *lokální maximum* vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) \leq f(a) \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(a) \cap M.$$

Lokální minimum se definuje analogicky. Ostré lokální maximum a minimum definujeme pomocí ostrých nerovností a prstencových okolí.

Věta (18 Nutná podmínka pro lokální extrém V 12.6.2)

Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$, $a \in M$ je vnitřní bod množiny M a $i \in \{1, \dots, N\}$. Má-li f v bodě a lokální extrém (vzhledem k M) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Definice (14 Lokální extrémy D 12.6.1)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$. Řekneme, že f má v bodě $a \in M$ *lokální maximum* vzhledem k M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) \leq f(a) \qquad \text{na } \mathcal{U}_\delta(a) \cap M.$$

Lokální minimum se definuje analogicky. Ostré lokální maximum a minimum definujeme pomocí ostrých nerovností a prstencových okolí.

Věta (18 Nutná podmínka pro lokální extrém V 12.6.2)

Nechť $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je definována na $M \subset \mathbb{R}^N$, $a \in M$ je vnitřní bod množiny M a $i \in \{1, \dots, N\}$. Má-li f v bodě a lokální extrém (vzhledem k M) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Definice (15 Klasifikace kvadratických forem D 12.6.3)

Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice typu $N \times N$ a $Q\colon \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ je jí odpovídající kvadratická forma, tedy

$$Q(\mathbf{h}) = (\mathbb{A}\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} h_i h_j \qquad \text{pro všechna } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N.$$

Tato kvadratická forma se nazývá

- *pozitivně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) > 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *negativně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) < 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \geq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *negativně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \leq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *indefinitní*, jestliže existují $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ taková, že $Q(\mathbf{h}) < 0 < Q(\mathbf{l})$.

Lemma (1 L 12.6.7)

Kvadratická forma Q je pozitivně definitní právě tehdy, když existuje $\alpha > 0$ splňující $Q(\mathbf{h}) \geq \alpha \|\mathbf{h}\|^2$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$.

11.6 Lokální extrému funkcí více proměnných II

Definice (15 Klasifikace kvadratických forem D 12.6.3)

Nechť $\mathbb{A}$ je symetrická matice typu $N \times N$ a $Q\colon \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ je jí odpovídající kvadratická forma, tedy

$$Q(\mathbf{h}) = (\mathbb{A}\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} h_i h_j \qquad \text{pro všechna } \mathbf{h} \in \mathbb{R}^N.$$

Tato kvadratická forma se nazývá

- *pozitivně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) > 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *negativně definitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) < 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\mathbf{0}\}$
- *pozitivně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \geq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *negativně semidefinitní*, jestliže $Q(\mathbf{h}) \leq 0$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$
- *indefinitní*, jestliže existují $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^N$ taková, že $Q(\mathbf{h}) < 0 < Q(\mathbf{l})$.

Lemma (1 L 12.6.7)

Kvadratická forma Q je pozitivně definitní právě tehdy, když existuje $\alpha > 0$ splňující $Q(\mathbf{h}) \geq \alpha \|\mathbf{h}\|^2$ pro všechna $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$.