Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 27.4.2022

Definice (9 Potenciál vektorového pole D 12.3.1)

Vektorové pole $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_N)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ nazýváme *potenciální* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, jestliže existuje funkce $U\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = T_i \qquad \text{na } \Omega \text{ pro všechna } i \in \{1, \ldots, N\}.$$

Funkci U pak nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\mathbf{T}$.

Definice (10 Souvislá množina 12.3.2)

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *souvislá*, jestliže každé její dva body lze spojit lomenou čarou tvořenou konečným počtem úseček, které celé leží v Ω. Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *oblast*, je-li otevřená a souvislá.

11.3 Potenciál vektorového pole I

Definice (9 Potenciál vektorového pole D 12.3.1)

Vektorové pole $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_N) \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ nazýváme *potenciální* na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, jestliže existuje funkce $U \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = T_i \qquad \text{na } \Omega \text{ pro všechna } i \in \{1, \dots, N\}.$$

Funkci U pak nazýváme *potenciálem* vektorového pole $\mathbf{T}$.

Definice (10 Souvislá množina 12.3.2)

Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *souvislá*, jestliže každé její dva body lze spojit lomenou čarou tvořenou konečným počtem úseček, které celé leží v Ω. Množina $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ se nazývá *oblast*, je-li otevřená a souvislá.

11.3 Potenciál vektorového pole II

Věta (10 O nejednoznačnosti potenciálu na oblasti V 12.3.3)

Nechť vektorové pole $\mathbf{T}$ *má na oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *potenciály* U_1 *a* U_2. *Pak existuje* $C \in \mathbb{R}$ *takové, že* $U_2 = U_1 + C$.

Věta (11 Nutná podmínka existence potenciálu V 12.3.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$. *Má-li* $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω, *pak platí*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (12 Postačující podmínka existence potenciálu V 12.3.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřený interval (tedy kvádr v případě omezenosti),* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *a*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Pak má vektorové pole $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω.

11.3 Potenciál vektorového pole II

Věta (10 O nejednoznačnosti potenciálu na oblasti V 12.3.3)

Nechť vektorové pole $\mathbf{T}$ *má na oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *potenciály* U_1 *a* U_2*. Pak existuje* $C \in \mathbb{R}$ *takové, že* $U_2 = U_1 + C$*.*

Věta (11 Nutná podmínka existence potenciálu V 12.3.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$*. Má-li* $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*, pak platí*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (12 Postačující podmínka existence potenciálu V 12.3.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřený interval (tedy kvádr v případě omezenosti),* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *a*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Pak má vektorové pole $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*.*

11.3 Potenciál vektorového pole II

Věta (10 O nejednoznačnosti potenciálu na oblasti V 12.3.3)

Nechť vektorové pole $\mathbf{T}$ *má na oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *potenciály* U_1 *a* U_2*. Pak existuje* $C \in \mathbb{R}$ *takové, že* $U_2 = U_1 + C$*.*

Věta (11 Nutná podmínka existence potenciálu V 12.3.5)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřená množina a* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$*. Má-li* $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*, pak platí*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Věta (12 Postačující podmínka existence potenciálu V 12.3.6)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *je otevřený interval (tedy kvádr v případě omezenosti),* $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *a*

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_j}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Pak má vektorové pole $\mathbf{T}$ *potenciál na* Ω*.*

Definice (11 Integrační faktor D 12.3.10)

Nechť $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je vektorové pole a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce $\mu\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je *integračním faktorem* vektorového pole $\mathbf{T}$ na množině Ω, jestliže $\mu\mathbf{T}$ je potenciální na Ω.

Věta (13 Nutná podmínka pro integrační faktor V 12.3.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ a $\mu \in C^1(\Omega)$ je integrační faktor pole $\mathbf{T}$ na Ω. Pak platí

$$\frac{\partial(\mu T_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu T_j)}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Definice (11 Integrační faktor D 12.3.10)

Nechť $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je vektorové pole a $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce $\mu\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je *integračním faktorem* vektorového pole $\mathbf{T}$ na množině Ω, jestliže $\mu\mathbf{T}$ je potenciální na Ω.

Věta (13 Nutná podmínka pro integrační faktor V 12.3.11)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je otevřená množina, $\mathbf{T} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ a $\mu \in C^1(\Omega)$ je integrační faktor pole $\mathbf{T}$ na Ω. Pak platí

$$\frac{\partial(\mu T_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu T_j)}{\partial x_i} \qquad \text{na } \Omega \qquad \text{pro všechna } i, j \in \{1, \dots, N\}.$$

11.4 Věta o implicitní funkci I

Věta (14 O existenci implicitní funkce (základní verze) V 12.4.2)

Nechť $F\colon \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$ *a* $b \in \mathbb{R}$. *Nechť* $F(a,b) = 0$ *a existuje okolí bodu* (a,b), *kde* F *je spojitá a funkce* $y \mapsto F(x,y)$ *je ryze monotonní (pro všechna* x *stejným způsobem). Pak existují* $\delta, \Delta > 0$ *taková, že pro každé* $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ *existuje právě jedno* $y_x \in \mathcal{U}_\Delta(b)$ *splňující* $F(x, y_x) = 0$. *Navíc funkce* $x \mapsto y_x$ *je spojitá na* $\mathcal{U}_\delta(a)$.

Věta (15 O derivaci implicitní funkce (základní verze) V 12.4.6)

Nechť $F\colon \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$. *Nechť*

(i) $F(a,b) = 0$

(ii) *existuje okolí bodu* (a,b), *kde* F *je třídy* C^k

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ *(parciální derivace podle poslední proměnné).*

Pak existují $\delta, \Delta > 0$ *taková, že pro každé* $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ *existuje právě jedno* $y_x \in \mathcal{U}_\Delta(b)$ *splňující* $F(x, y_x) = 0$ *a funkce* $\varphi\colon x \mapsto y_x$ *je třídy* C^k *na* $\mathcal{U}_\delta(a)$. *Navíc*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \qquad \text{pro všechna } j \in \{1, \dots, N\} \text{ a } x \in \mathcal{U}_\delta(a).$$

11.4 Věta o implicitní funkci I

Věta (14 O existenci implicitní funkce (základní verze) V 12.4.2)

Nechť $F\colon \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^N$ *a* $b \in \mathbb{R}$. *Nechť* $F(a,b) = 0$ *a existuje okolí bodu* (a,b), *kde* F *je spojitá a funkce* $y \mapsto F(x,y)$ *je ryze monotonní (pro všechna* x *stejným způsobem). Pak existují* $\delta, \Delta > 0$ *taková, že pro každé* $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ *existuje právě jedno* $y_x \in \mathcal{U}_\Delta(b)$ *splňující* $F(x,y_x) = 0$. *Navíc funkce* $x \mapsto y_x$ *je spojitá na* $\mathcal{U}_\delta(a)$.

Věta (15 O derivaci implicitní funkce (základní verze) V 12.4.6)

Nechť $F\colon \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$. *Nechť*

(i) $F(a,b) = 0$

(ii) *existuje okolí bodu* (a,b), *kde* F *je třídy* C^k

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$ *(parciální derivace podle poslední proměnné).*

Pak existují $\delta, \Delta > 0$ *taková, že pro každé* $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ *existuje právě jedno* $y_x \in \mathcal{U}_\Delta(b)$ *splňující* $F(x,y_x) = 0$ *a funkce* $\varphi\colon x \mapsto y_x$ *je třídy* C^k *na* $\mathcal{U}_\delta(a)$. *Navíc*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))} \qquad \text{pro všechna } j \in \{1,\dots,N\} \text{ a } x \in \mathcal{U}_\delta(a).$$

Věta (16 O implicitní funkci V 12.4.14)

Nechť $N, m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\vec{F}\colon \mathbb{R}^{N+m} \to \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^m$. *Nechť*

(i) $\vec{F}(a, b) = (0, \dots, 0)$

(ii) *existuje okolí bodu* (a, b), *kde všechny složky zobrazení* $\vec{F}$ *jsou třídy* C^k

(iii)

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_2}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Pak existují $\delta, \Delta > 0$ *taková, že pro každé* $x \in \mathcal{U}_\delta(a)$ *existuje právě jedno* $y_x \in \mathcal{U}_\Delta(b)$ *splňující* $\vec{F}(x, y_x) = (0, \dots, 0)$ *a pro zobrazení* $\vec{\varphi}\colon x \mapsto y_x$ *platí, že* $\vec{\varphi} \in C^k(\mathcal{U}_\delta(a); \mathbb{R}^m)$.

Definice (12 Jacobián D 12.8.1)

Nechť všechny složky zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mají v bodě $a \in \mathbb{R}^N$ parciální derivace. Pak matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(a) \end{pmatrix}$$

nazýváme Jacobiho maticí zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě a. Její determinant se nazývá *Jacobiho determinant* nebo též *jacobián* a značí se $\mathrm{J}_{\mathbf{f}}(a)$.