Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 7.4.2022

10.4 Hustota a separabilita I

Definice (12 Hustá podmnožina D 11.4.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Říkáme, že množina A je *hustá* v P, jestliže v každém okolí každého prvku z P leží prvek z A.

Definice (13 Separabilní prostor D 11.4.4)

Řekneme, že metrický prostor je *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá množina.

10.4 Hustota a separabilita I

Definice (12 Hustá podmnožina D 11.4.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Říkáme, že množina A je *hustá* v P, jestliže v každém okolí každého prvku z P leží prvek z A.

Definice (13 Separabilní prostor D 11.4.4)

Řekneme, že metrický prostor je *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá množina.

10.4 Hustota a separabilita II

Věta (15 Weierstraß V 11.10.2)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Potom pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje polynom P_ε takový, že

$$\max_{[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Důsledek (2 Separabilita prostoru spojitých funkcí na uzavřeném intervalu Důsl. 11.10.3)

Prostor $C([a,b])$ s metrikou $\varrho(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ je separabilní metrický prostor.

10.4 Hustota a separabilita II

Věta (15 Weierstraß V 11.10.2)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Potom pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje polynom P_ε takový, že

$$\max_{[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Důsledek (2 Separabilita prostoru spojitých funkcí na uzavřeném intervalu Důsl. 11.10.3)

Prostor $C([a,b])$ s metrikou $\varrho(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|$ je separabilní metrický prostor.

10.5 Úplné metrické prostory I

Definice (14 Cauchyovská posloupnost D 11.5.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset P$ je *cauchyovská* v (P, ϱ), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad m, n > n_0 \implies \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Věta (16 O vztahu konvergence a cauchyovskosti V 11.5.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset P$ konvergentní, pak je cauchyovská.

Definice (14 Úplný metrický prostor D 11.5.2)

Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost jeho prvků v něm konverguje.

10.5 Úplné metrické prostory I

Definice (14 Cauchyovská posloupnost D 11.5.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset P$ je *cauchyovská* v (P, ϱ), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad m, n > n_0 \implies \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Věta (16 O vztahu konvergence a cauchyovskosti V 11.5.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset P$ konvergentní, pak je cauchyovská.

Definice (14 Úplný metrický prostor D 11.5.2)

Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost jeho prvků v něm konverguje.

10.5 Úplné metrické prostory I

Definice (14 Cauchyovská posloupnost D 11.5.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset P$ je *cauchyovská* v (P, ϱ), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad m, n > n_0 \implies \varrho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Věta (16 O vztahu konvergence a cauchyovskosti V 11.5.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset P$ konvergentní, pak je cauchyovská.

Definice (14 Úplný metrický prostor D 11.5.2)

Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost jeho prvků v něm konverguje.

10.5 Úplné metrické prostory II

Definice (16 Banachův a Hilbertův prostor D 11.5.6)

Úplnému normovanému prostoru říkáme *Banachův prostor*. Úplnému prostoru se skalárním součinem říkáme *Hilbertův prostor*. (Úplnost samozřejmě bereme vůči metrice vzniklé z uvedené normy, respektive skalárního součinu.)

Věta (17 Charakterizace úplných podprostorů úplného prostoru V 11.5.9)

Nechť je (P, ϱ) úplný metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$(A, \varrho) \text{ je úplný metrický prostor} \iff A \text{ je uzavřená (v } P\text{).}$$

10.5 Úplné metrické prostory II

Definice (16 Banachův a Hilbertův prostor D 11.5.6)

Úplnému normovanému prostoru říkáme *Banachův prostor*. Úplnému prostoru se skalárním součinem říkáme *Hilbertův prostor*. (Úplnost samozřejmě bereme vůči metrice vzniklé z uvedené normy, respektive skalárního součinu.)

Věta (17 Charakterizace úplných podprostorů úplného prostoru V 11.5.9)

Nechť je (P, ϱ) úplný metrický prostor a $A \subset P$. Pak

$$(A, \varrho) \text{ je úplný metrický prostor} \iff A \text{ je uzavřená (v } P).$$

Definice (17 Omezená množina D 11.6.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *omezená*, jestliže existují $x_0 \in P$ a $R > 0$ tak, že $A \subset \mathcal{U}_R(x_0)$.

Věta (18 Cauchyovskost implikuje omezenost)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ je cauchyovská. Pak je A omezená.

Definice (18 Kompaktní množina D 11.6.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

Definice (17 Omezená množina D 11.6.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *omezená*, jestliže existují $x_0 \in P$ a $R > 0$ tak, že $A \subset \mathcal{U}_R(x_0)$.

Věta (18 Cauchyovskost implikuje omezenost)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ je cauchyovská. Pak je A omezená.

Definice (18 Kompaktní množina D 11.6.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

Definice (17 Omezená množina D 11.6.5)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *omezená*, jestliže existují $x_0 \in P$ a $R > 0$ tak, že $A \subset \mathcal{U}_R(x_0)$.

Věta (18 Cauchyovskost implikuje omezenost)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$ je cauchyovská. Pak je A omezená.

Definice (18 Kompaktní množina D 11.6.1)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Řekneme, že A je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat podposloupnost konvergentní v A.

10.6 Omezené a kompaktní množiny II

Věta (19 Kompaktnost implikuje omezenost a uzavřenost V 11.6.8)

Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$ je kompaktní. Pak A je omezená a uzavřená.

Věta (20 Omezenost a uzavřenost implikují kompaktnost v konečné dimenzi V 11.6.10)

V konečnědimenzionálním normovaném lineárním prostoru je každá omezená a uzavřená množina kompaktní.

Věta (21 Kompaktnost implikuje separabilitu V 11.6.11)

Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.

10.6 Omezené a kompaktní množiny II

Věta (19 Kompaktnost implikuje omezenost a uzavřenost V 11.6.8)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$ *je kompaktní. Pak* A *je omezená a uzavřená.*

Věta (20 Omezenost a uzavřenost implikují kompaktnost v konečné dimenzi V 11.6.10)

V konečnědimenzionálním normovaném lineárním prostoru je každá omezená a uzavřená množina kompaktní.

Věta (21 Kompaktnost implikuje separabilitu V 11.6.11)

Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.

10.6 Omezené a kompaktní množiny II

Věta (19 Kompaktnost implikuje omezenost a uzavřenost V 11.6.8)

Nechť (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$ *je kompaktní. Pak* A *je omezená a uzavřená.*

Věta (20 Omezenost a uzavřenost implikují kompaktnost v konečné dimenzi V 11.6.10)

V konečnědimenzionálním normovaném lineárním prostoru je každá omezená a uzavřená množina kompaktní.

Věta (21 Kompaktnost implikuje separabilitu V 11.6.11)

Každá kompaktní podmnožina metrického prostoru je separabilní.