Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 23.3.2022

Definice (1 Mocninná řada D 10.1.1)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

nazýváme *mocninnou řadou* se *středem* z_0. Čísla a_k nazýváme *koeficienty* mocninné řady.

Věta (1 Absolutní konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ je mocninná řada. Nechť existuje $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takové, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_1^k$ konverguje. Potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_1|$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ konverguje absolutně.

Definice (1 Mocninná řada D 10.1.1)

Nechť $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

nazýváme *mocninnou řadou* se *středem* z_0. Čísla a_k nazýváme *koeficienty* mocninné řady.

Věta (1 Absolutní konvergence mocninné řady)

Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *je mocninná řada. Nechť existuje* $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *takové, že řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z_1^k$ *konverguje. Potom pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_1|$ *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ *konverguje absolutně.*

Věta (2 O konvergenci mocninné řady V 10.1.3)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. *Položme*

$$R := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \qquad s\ konvencí\ \frac{1}{0} = \infty\ a\ \frac{1}{\infty} = 0.$$

Pak

(i) *řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *konverguje absolutně na* B_R

(ii) *řada* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *nekonverguje na* $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > R\}$

(iii) *existuje-li* $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}|$, *pak se rovná* R

(iv) *existuje-li* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, *pak se rovná* $\frac{1}{R}$.

9.1 Základní vlastnosti mocninných řad III

Lemma (1 L 10.1.9)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. Mocninné řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ mají stejný poloměr konvergence.

Věta (3 Derivace mocninné řady V 10.1.11)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. Pak pro $x \in (-R, R)$, kde $R \geq 0$ je poloměr konvergence příslušné mocninné řady, platí

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Důsledek (1 Důsl 10 1 13)

Každá mocninná řada na svém kruhu konvergence definuje nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci.

9.1 Základní vlastnosti mocninných řad III

Lemma (1 L 10.1.9)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. *Mocninné řady* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ *mají stejný poloměr konvergence.*

Věta (3 Derivace mocninné řady V 10.1.11)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. *Pak pro* $x \in (-R, R)$, *kde* $R \geq 0$ *je poloměr konvergence příslušné mocninné řady, platí*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Důsledek (1 Důsl 10 1 13)

Každá mocninná řada na svém kruhu konvergence definuje nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci.

9.1 Základní vlastnosti mocninných řad III

Lemma (1 L 10.1.9)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. *Mocninné řady* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *a* $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ *mají stejný poloměr konvergence.*

Věta (3 Derivace mocninné řady V 10.1.11)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$. *Pak pro* $x \in (-R, R)$, *kde* $R \geq 0$ *je poloměr konvergence příslušné mocninné řady, platí*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Důsledek (1 Důsl 10 1 13)

Každá mocninná řada na svém kruhu konvergence definuje nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci.

Věta (4 Integrace mocninné řady V 10.1.14)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$.

(i) *Pro* $x \in \mathbb{R}$ *ležící uvnitř konvergenčního kruhu platí*

$$\int \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Big) \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C.$$

(ii) *Jestliže* $a, b \in (-R, R)$, *kde* R *je poloměr konvergence řady* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *potom platí*

$$(\mathcal{R}) \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Big) \,\mathrm{d}x = (\mathcal{N}) \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Big) \,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{N}) \int_a^b a_k x^k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{R}) \int_a^b a_k x^k \,\mathrm{d}x.$$

9.2 Vztah mezi mocninnými a Taylorovými řadami I

Definice (2 Taylorova řada D 10.2.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonečněkrát diferencovatelná v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazveme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0.

Věta (5 O vztahu mocninných a Taylorových řad V 10.2.3)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ takové, že mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ konverguje na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Pak je Taylorovou řadou svého součtu v bodě x_0.

9.2 Vztah mezi mocninnými a Taylorovými řadami I

Definice (2 Taylorova řada D 10.2.1)

Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nekonečněkrát diferencovatelná v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazveme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0.

Věta (5 O vztahu mocninných a Taylorových řad V 10.2.3)

Nechť $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ takové, že mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ konverguje na $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pak je Taylorovou řadou svého součtu v bodě x_0.