Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 3.3.2022

Věta (13 O nezávislosti komplexních řešení homogenní rovnice T 8.5.21)

Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *jsou různé kořeny charakteristického polynomu příslušejícího rovnici* $Ly = 0$ *a* $k_1, \dots, k_m$ *jsou jejich násobnosti. Pak*

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \dots, & x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_m x}, & xe^{\lambda_m x}, & \dots, & x^{k_m-1}e^{\lambda_m x} \end{array}$$

jsou nezávislá řešení úlohy $Ly = 0$ *(neexistuje netriviální sada komplexních konstant dávající* $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i \equiv 0$ *na* (a, b)*, kde* y_i *jsou výše popsané funkce a* $n = k_1 + \dots + k_m$*).*

7.4.3 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty IV

Věta (14 O fundamentálním systému rovnice s konstantními reálnými koeficienty V 8.5.22)

Nechť charakteristický polynom rovnice $Ly = 0$ s konstantními reálnými koeficienty má reálné kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a komplexní kořeny $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_l$, $\overline{\lambda}_{m+1}, \dots, \overline{\lambda}_l$ s násobnostmi $k_1, \dots, k_l$. Pak funkce

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{k_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\mathrm{e}^{\lambda_m x}, & \dots, & x^{k_m-1}\mathrm{e}^{\lambda_m x}, \\
\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_{m+1}x}\cos(\operatorname{Im}\lambda_{m+1}x), & \dots, & x^{k_{m+1}-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_{m+1}x}\cos(\operatorname{Im}\lambda_{m+1}x), \\
\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_{m+1}x}\sin(\operatorname{Im}\lambda_{m+1}x), & \dots, & x^{k_{m+1}-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_{m+1}x}\sin(\operatorname{Im}\lambda_{m+1}x), \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_l x}\cos(\operatorname{Im}\lambda_l x), & \dots, & x^{k_l-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_l x}\cos(\operatorname{Im}\lambda_l x), \\
\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_l x}\sin(\operatorname{Im}\lambda_l x), & \dots, & x^{k_l-1}\mathrm{e}^{\operatorname{Re}\lambda_l x}\sin(\operatorname{Im}\lambda_l x)
\end{array}
$$

tvoří fundamentální systém rovnice $Ly = 0$.