Matematická analýza II

Milan Pokorný

Přednáška 24.2.2022

Definice (9 Lineární ODR n-tého řádu)

Nechť $f, a_0, a_1, \dots, a_n \in C((a,b))$. Rovnice

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

se nazývá *lineární rovnice n-tého řádu*. Funkcím $a_0, \dots, a_n$ říkáme *koeficienty* a f je *pravá strana*. Pro jednoduchost zápisu budeme v dalším používat značení

$$Ly := a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Rovnice

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad \text{neboli} \qquad Ly = 0$$

se nazývá *homogenní rovnice* příslušející k $Ly = f$.

7.4 Lineární rovnice n-tého řádu II

Věta (5 Globální existence a jednoznačnost pro rovnici n-tého řádu V 8.5.1)

Nechť $f, a_0, a_1, \dots, a_n \in C((a,b))$ a $a_n \neq 0$ na (a,b). Pak pro každé $x_0 \in (a,b)$ a každé $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ existuje jednoznačné řešení rovnice $Ly = f$ na (a,b) splňující

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad \dots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Důsledek (1 Tvar řešení při nulových datech T 8.5.2)

Nechť y řeší $Ly = f$ na (a,b) a splňuje počáteční podmínky $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ v bodě $x_0 \in (a,b)$. Jestliže pravá strana splňuje $f \equiv 0$ na (a,b), pak platí $y \equiv 0$ na (a,b).

Věta (5 Globální existence a jednoznačnost pro rovnici n-tého řádu V 8.5.1)

Nechť $f, a_0, a_1, \dots, a_n \in C((a,b))$ a $a_n \neq 0$ na (a,b). Pak pro každé $x_0 \in (a,b)$ a každé $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ existuje jednoznačné řešení rovnice $Ly = f$ na (a,b) splňující

$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_1, \qquad \dots, \qquad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Důsledek (1 Tvar řešení při nulových datech T 8.5.2)

Nechť y řeší $Ly = f$ na (a,b) a splňuje počáteční podmínky $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ v bodě $x_0 \in (a,b)$. Jestliže pravá strana splňuje $f \equiv 0$ na (a,b), pak platí $y \equiv 0$ na (a,b).

Definice (10 Lineární nezávislost funkcí D 8.5.3)

Řekneme, že $u_1, \dots, u_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jsou *lineárně nezávislé* na (a, b), jestliže pro každou n-tici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \equiv 0 \qquad \text{na } (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

V opačném případě říkáme, že $u_1, \dots, u_n$ jsou *lineárně závislé* na (a, b).

Věta (6 O prostoru řešení homogenní rovnice V 8.5.4)

Množina všech řešení homogenní rovnice $Ly = 0$ tvoří n-dimenzionální podprostor prostoru $C^n((a, b))$.

Definice (10 Lineární nezávislost funkcí D 8.5.3)

Řekneme, že $u_1, \dots, u_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ jsou *lineárně nezávislé* na (a, b), jestliže pro každou n-tici $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \equiv 0 \qquad \text{na } (a, b) \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

V opačném případě říkáme, že $u_1, \dots, u_n$ jsou *lineárně závislé* na (a, b).

Věta (6 O prostoru řešení homogenní rovnice V 8.5.4)

Množina všech řešení homogenní rovnice $Ly = 0$ tvoří n-dimenzionální podprostor prostoru $C^n((a, b))$.

Definice (11 Fundamentální systém D 8.5.5)

Množina $u_1, \dots, u_n$ se nazývá *fundamentální systém* rovnice $Ly = 0$ na (a, b), jestliže funkce $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a, b) a jsou zde lineárně nezávislé.

Definice (12 Wronskián D 8.5.6)

Wronského determinant (častěji zkráceně *wronskián*) funkcí $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a, b))$ v bodě $x \in (a, b)$ je

$$W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]}(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Výše uvedená matice se nazývá *Wronského matice*.

7.4.1 Homogenní rovnice: obecné výsledky II

Definice (11 Fundamentální systém D 8.5.5)

Množina $u_1, \dots, u_n$ se nazývá *fundamentální systém* rovnice $Ly = 0$ na (a, b), jestliže funkce $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a, b) a jsou zde lineárně nezávislé.

Definice (12 Wronskián D 8.5.6)

Wronského determinant (častěji zkráceně *wronskián*) funkcí $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a, b))$ v bodě $x \in (a, b)$ je

$$W_{[u_1, u_2, \dots, u_n]}(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} .$$

Výše uvedená matice se nazývá *Wronského matice*.

7.4.1 Homogenní rovnice: obecné výsledky III

Věta (7 Obecný vztah lineární závislosti a wronskiánu V 8.5.7)

Jsou-li $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$ lineárně závislé na (a,b), pak $W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]} \equiv 0$ na (a,b).

Věta (8 Vztah lineární závislosti a wronskiánu pro řešení V 8.5.10)

Nechť funkce $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a,b). Pak $u_1, \dots, u_n$ jsou lineárně nezávislá na (a,b) právě tehdy, když existuje $x_0 \in (a,b)$ splňující $W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]}(x_0) \neq 0$.

Věta (9 Derivace wronskiánu L 8.5.8)

Nechť $u_1, \dots, u_n$ řeší $Ly = 0$ na (a,b). Označme $W(x) = W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]}(x)$. Pak

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) \qquad \text{na } (a,b).$$

Speciálně, pro libovolná $x_0, x \in (a,b)$ máme

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(s)} \, \mathrm{d}s}.$$

7.4 Lineární rovnice n-tého řádu

7.4.1 Homogenní rovnice: obecné výsledky III

Věta (7 Obecný vztah lineární závislosti a wronskiánu V 8.5.7)

Jsou-li $u_1, \ldots, u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$ *lineárně závislé na* (a,b), *pak* $W_{[u_1,u_2,\ldots,u_n]} \equiv 0$ *na* (a,b).

Věta (8 Vztah lineární závislosti a wronskiánu pro řešení V 8.5.10)

Nechť funkce $u_1, \ldots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a,b). *Pak* $u_1, \ldots, u_n$ *jsou lineárně nezávislá na* (a,b) *právě tehdy, když existuje* $x_0 \in (a,b)$ *splňující* $W_{[u_1,u_2,\ldots,u_n]}(x_0) \neq 0$.

Věta (9 Derivace wronskiánu L 8.5.8)

Nechť $u_1, \ldots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a,b). *Označme* $W(x) = W_{[u_1,u_2,\ldots,u_n]}(x)$. *Pak*

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) \qquad \text{na } (a,b).$$

Speciálně, pro libovolná $x_0, x \in (a,b)$ *máme*

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(s)} \, \mathrm{d}s}.$$

7.4 Lineární rovnice n-tého řádu
7.4.1 Homogenní rovnice: obecné výsledky III

Věta (7 Obecný vztah lineární závislosti a wronskiánu V 8.5.7)

Jsou-li $u_1, \dots, u_n \in C^{(n-1)}((a,b))$ *lineárně závislé na* (a,b), *pak* $W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]} \equiv 0$ *na* (a,b).

Věta (8 Vztah lineární závislosti a wronskiánu pro řešení V 8.5.10)

Nechť funkce $u_1, \dots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a,b). *Pak* $u_1, \dots, u_n$ *jsou lineárně nezávislá na* (a,b) *právě tehdy, když existuje* $x_0 \in (a,b)$ *splňující* $W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]}(x_0) \neq 0$.

Věta (9 Derivace wronskiánu L 8.5.8)

Nechť $u_1, \dots, u_n$ *řeší* $Ly = 0$ *na* (a,b). *Označme* $W(x) = W_{[u_1,u_2,\dots,u_n]}(x)$. *Pak*

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) \qquad \text{na } (a,b).$$

Speciálně, pro libovolná $x_0, x \in (a,b)$ *máme*

$$W(x) = W(x_0) \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(s)} \,\mathrm{d}s}.$$